

TESTI

Ricevimento lunedì 11:30 12:30 14:30 16:30 1° piano stereo corridoio
Bos

(T) (STEFANO DE MARCHI) DIARIOBOOK.ADF UNIVAD.IT

(ALVISE SAMARUA) / ~ ALVISE / DIDATTICA

(L) (ESERCIZI forniti dall'insegnante sulla pagina)

L'esame è una prova scritta orale. commentare le teorie || quelle fornite dal prof.
• commentare l'esercizio durante esercitazioni

Al laboratorio si lavora al computer

Linguaggio • MATLAB facile da imparare
• OCTAVE → open source

TOOLBOX
NON TIPIZZATO
GRAFICA INTEGRATA
INTERATTIVO / INTERPRETATO

Non serve dare il tipo di una variabile

ARGOMENTI TRATTATI

1) RAPP. NUMERI MACCHINA

2) EQUAZIONI NON LINEARI ES: $F(x)=0$ $F(x)=e^{-x}-1$

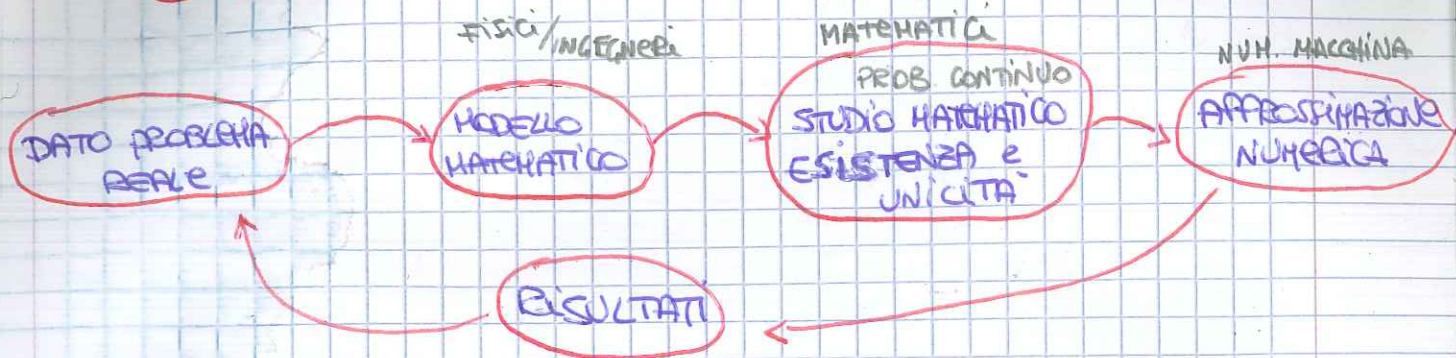
3) SISTEMI LINEARI $Ax=b$

4) AUTOVALORI / AUTOVETTORI - FULL
- PARZIALE (es: solo quello maggiore)

5) INTERPOLAZIONE / APPROSSIMAZIONE

▷ RETTA REGRESSIONE MINIMI QUADRATI

CALCOLO NUMERICO



ES:

$$p(x) \quad x^2 + 2bx + c = 0$$

$$b^2 > c$$

Dimostrare che ha 2 radici reali

1) "Metodo MATEMATICO"

NESSUNA SOLUZIONE $p(x) > 0$ $p(x) < 0$ (-)

$$p(b) = b^2 + 2b^2 + c = -b^2 + c < 0$$

$p(x) > 0$ con x grande

(+) ASSURDO ricerca degli zeri

2) "costruttivo"

$$x^2 + 2bx + c = 0$$

$$(x+b)^2 - b^2 + c = 0$$

$$x_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - c}$$

RAZIONALIZZO

$$-b \pm (\sqrt{b^2 - c}) \frac{(-b \pm \sqrt{b^2 - c})}{-b \pm \sqrt{b^2 - c}} = \frac{c}{-b \pm \sqrt{b^2 - c}}$$

identici

2 metodi analitici per trovare le soluzioni però si rischia che al calcolatore si sommano 2 approssimazioni differenti (numeriche). Dobbiamo spei individuare qual'è il metodo migliore.

$$ES: \quad x^2 + 2bx + c = 0$$

• Ricerca degli zeri

visto come un polinomio

• Ricerca degli zeri

visto come una funzione ($f(x) = 0$)

• Ricerca Autovalori

MATRICE IN FORMA COMPAGNA

$$A = \begin{bmatrix} -2b & -c \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$p(\lambda) = (-2b - \lambda)(-\lambda) + c$$

$$\lambda^2 + 2b\lambda + c$$

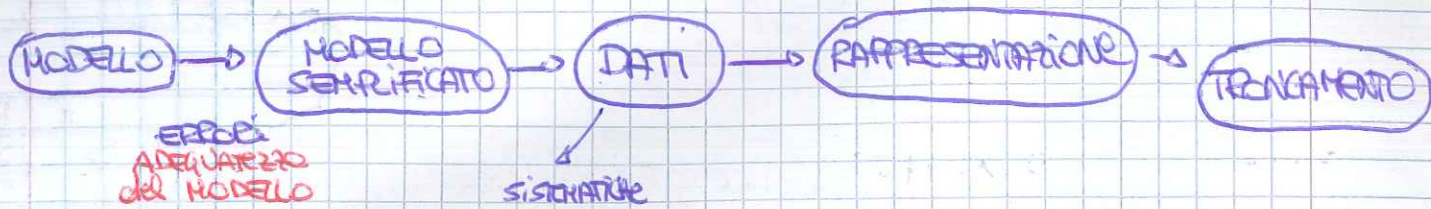
POLINOMIO CARATTERISTICO

con metodo ricerca autovalori **STABILE**

ERRORI MACCHINA

28 MARZO

NUMERI saranno finiti perché abbiamo una memoria FINITA
Lo velocità esecuzione



ERRORI nel rappresentazione i numeri nelle MACCHINE (computer)
perché abbiamo una dimensione finita di memoria

3 TIPI di NUMERI

	C/C++	MATLAB	
INTERI	int / unsigned int	FLOAT-POINT	} doppio precisione
REALI	float / double	FLOAT-POINT	
COMPLESSI	complex.h float / Im $z = a + ib$	2 FLOAT	

NUMERI INTERI

Operazioni tra numeri INTERI NON da ERRORI Troncare

OVERFLOW
[Aloni range]
LIMIT superiore
UNDERFLOW

Rappresentati su 8 bit ^{SENZA} segno da 0 a 255
CARDINALITA' = $2^8 - 1$

Rappresentati su 8 bit con segno da $[-127; +126]$

NUMERI REALI

ES: $\underbrace{123}_{\text{int}}, \underbrace{456}_{\text{float}}$

numero $Q = \text{SEGNO}(Q) \text{ MANTISSA} \text{ PN}$ ^{ESPONENTE}

$$1,23456 \cdot 10^2$$

$$0,123456 \cdot 10^3 \leftarrow \text{NORMALIZZAZIONE CORRETTA}$$

$$0,1 = \frac{1}{10} < 0,1234 < 1$$

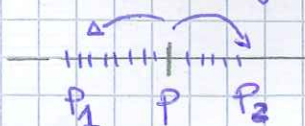
$$\frac{1}{N} \leq P < 1$$

- Minore di zero per la parte intera
- Non può essere

SEGNO	ESPONENTE	MANTISSA
-------	-----------	----------

[MANTISSA FINITA]

Nel CALCOLATORE verrà eseguito un ARROTONDAMENTO ES: $0,59 \approx 0,6$



Questo intervallo può essere rappresentato o in P_1 o in P_2

$$Q = P N^q$$

$$\begin{aligned} \text{Errore} &= |Q - \text{float}(Q)| \\ &= \frac{1}{2} N^{-t} \cdot N^q = \frac{1}{2} N^{q-t} \end{aligned}$$

$$|Q| < |P N^q| \quad N^{q-1} < \dots < N^{q+1}$$

$$\epsilon_{\text{relativo}} = \frac{|Q - \text{float}(Q)|}{|Q|}$$

↑ numero rapp. dal calcolatore

$$< \frac{\frac{1}{2} N^{q-t}}{N^{q-1}} = \frac{1}{2} N^{1-t}$$

EPS

$$N=10 \\ t=2$$

$$0,005 = \epsilon_{\text{relativo}}$$

PRECISIONE MACCHINA

= errore relativo non possiamo chiedere una tolleranza minore

$$\text{Lo } 1 + \text{EPS} > 1$$

se lavoriamo con 8 cifre in base 10

$$t=8 \quad N=10$$

esempio

$$\frac{1}{2} 10^{-1-8} = 0,5 \cdot 10^{-9}$$

0,12345678

l'errore sarà sulla 7° cifra decimale

$$\epsilon^k = 2^0 = 1$$

while $(1 + \epsilon^k > 1)$

$$\epsilon^k = \epsilon^k / 2$$

}

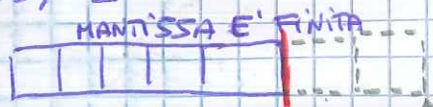
$$\epsilon^k /= 2$$

CICLO SU CARICA

$$1 + 2^{-1} = 1 \text{ FALSO}$$

$$1 + 2^{-2} = 1 \text{ FALSO}$$

$$1 + 2^{-3} = 1 \text{ FALSO}$$



qui divido
per 2

ARRETO IN UN PUNTO

IN CUI ES'CO DALLA MANTISSA
PER RAPPRESENTARE IL NUMERO

QUINDI CON COSA VADO A SONNARE 1

PER RAPPRESENTARE L'INFINITO $\frac{1}{1} = \pm \text{INF}$

numeri denormalizzati

0 $q_{\min}$

$q_{\max}$

OVERFLOW

$$m \leq q \leq M$$

$$\frac{1}{1} = \pm \text{INF}$$

UNDERFLOW

approssimazioni a zero

$$q_{\text{minimo numero rappresentabile}} = 0,10 \dots 0, N^m = N^{m-1}$$

$$q_{\text{massimo numero rappresentato}} = 0,9999 \dots 9 \cdot 10^M = N^M (1 - N^{-t})$$

PER L'ESPONENTE PIU' GRANDE $q = M$ RAPPRESENTA ∞ (INF) COM MANTISSA TUTTI ZERI

PER L'ESPONENTE PIU' GRANDE $q = M$ RAPPRESENTA NAN se MANTISSA TUTTI $\neq 0$

PER L'ESPONENTE PIU' PICCOLO $q = m$ RAPPRESENTA (ZERO) se MANTISSA TUTTI $= 0$

NUMERI DENORMALIZZATI per evitare gradualmente verso lo zero
con esponente piu' piccolo con MANTISSA $\neq 0$

STANDARD per RAPPRESENTARE QUESTI NUMERI
si definisce (IEEE 754)

EPS = PRECISIONE MACCHINA

SINGOLA PRECISIONE: 1 bit SEGNO + 8 bit ESPONENTE + 23 bit MANTISSA = 32 bit = 4 byte

DOPIA PRECISIONE: 1 bit SEGNO + 11 bit ESPONENTE + 52 bit MANTISSA = 64 bit = 8 byte

ES: $N = \text{base } 2$

$$EPS = \frac{1}{2} N^{1-t} = \frac{1}{2} 2^{1-23} = 2^{-23} = 1,19 \cdot 10^{-7} \quad \text{precisione macchina}$$

$$EPS = \frac{1}{2} N^{1-t} = \frac{1}{2} 2^{1-52} = 2^{-52} = 2,2 \cdot 10^{-16}$$

OPERAZIONI ARITMETICHE

$$x \oplus y = y \oplus x$$

$$x \odot y = y \odot x \quad \rightarrow \text{non ha proprietà commutativa}$$

$$x \oplus y \oplus z \neq x \oplus (y \oplus z)$$

$$\frac{(x \cdot y)}{y} \neq x$$

y rappresentazione in macchina

$$\frac{|fp(y)|}{fp(x)} < EPS$$

ESEMPIO

$$\begin{cases} 0,1234 \cdot 10^0 \\ 0,1000 \cdot 10^{-6} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l} 0,1234 & 0000 \\ 0,0000 & 01 \\ \hline 0,1234 & \end{array}$$

ovvero cancellazione numerica

Le operazioni $\oplus, \ominus, \odot, \oslash$ sono stabili

$$\epsilon_{r,x,y}^* = \frac{|x \cdot y - x \cdot y|}{|x \cdot y|}$$

$$\epsilon_{r,x} = \frac{|x - fp(x)|}{|x|}$$

$$\epsilon_{r,y} = \frac{|y - fp(y)|}{|y|}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{SOMMA e SOTTRAZIONE} \\ \epsilon_{r,x,y} \approx \epsilon_r x + \epsilon_r y \quad \text{OK} \end{array} \right.$$

$$\epsilon_{r,x,y} \approx \epsilon_r x - \epsilon_r y \quad \text{OK}$$

$$EPS = \frac{1}{2} N^{1-t} = 0,5 \cdot 10^{-3}$$

$0,5 \cdot 10^{-3} > 0,1 \cdot 10^{-3}$
quindi non fuori precisione

$$\epsilon_{x,y} \leq \left| \frac{x}{x \pm y} \right| \epsilon_x + \left| \frac{y}{x \pm y} \right| \epsilon_y$$

$$x+y \approx 0$$

$$x \approx -y$$

CANCELLAZIONE NUMERICA

pendita di cifre significative

CAUSA: se 2 numeri sono quasi uguali

FENOMENO CANCELLAZIONE NUMERICA

30 MARZO

$$EPS = \frac{1}{2} N^{1-\epsilon}$$

$$fl(a) = a(1+\epsilon)$$

numero macchina (operazione di arrotondamento)

$$\epsilon_{relativo} = \frac{a(1+\epsilon) - a}{a} = \epsilon + 5EPS$$

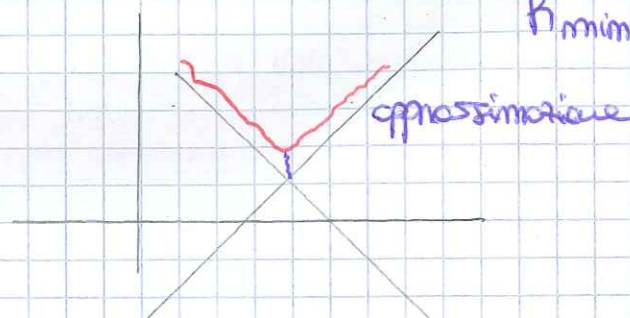
$$f_R = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

RAPPORTO INCREMENTALE

$$f(x) = x^3 + 1 \quad x = 1$$

$$R_{min} = 10^{-8}$$

per h molto piccolo si verifica il FENOMENO della cancellazione numerica



$$f_1 = 1$$

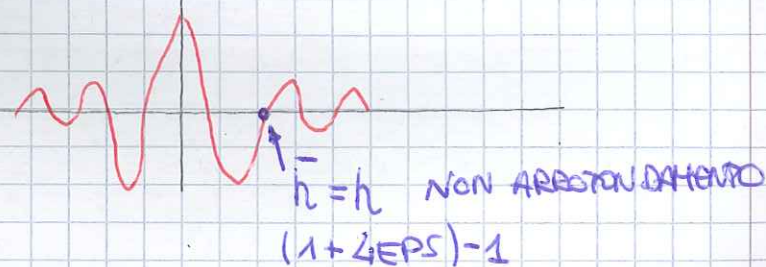
$$f_h = \frac{(1+h) - 1}{h}$$

$$1+h \approx 1$$

$$fl((1+h) - 1) > fl(h)$$

Picchi positivi $\bar{h} > h$ APPROX $\uparrow$

Picchi negativi $\bar{h} < h$ APPROX $\downarrow$



$\bar{h} = h$ NON ARROTONDAMENTO
 $(1+4EPS) - 1$

$$- a_1 + a_2 + a_3$$

$a > 0$ tutti positivi

metodo migliore
SOMMARE del più piccolo al più grande

ESempio serie di TAYLOR per CALCOLARE e^x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

ES:

$$e^{-10} = 1 - 10 + \frac{10^2}{2!} + \frac{10^3}{3!}$$

TRACCIATO:

$$\frac{1}{e^{10}} = \frac{1}{1 + \frac{10 + 10^2}{2!} + \frac{10^3}{3!}}$$

ORA HO
TUTTE SIME

non sono cancellazione
numerica

$$\epsilon_5: \sqrt{x+\delta} - \sqrt{x}$$

Effetto cancellazione numerica

$$|\delta| \ll x$$

suss. RARIDOLIZIONE

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

quando

$$b^2 \gg 4ac$$

AVRO' CANCELLAZIONE NUMERICA

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{c}{ax_1}$$

PROBLEMA BEN CONDIZIONATO

Quando una piccola ^o $\epsilon_{\text{relativo}}$ perturbazione dei dati in INGRESSO
causa una piccola perturbazione dei dati in USCITA

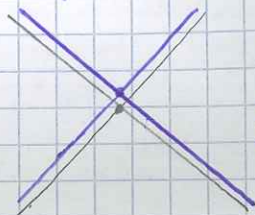
$$\frac{\| \Delta r \|}{\| r \|} \leq \text{condizione problema} (p) \frac{\| \Delta d \|}{\| d \|}$$

$$\epsilon_{\text{relativo della somma}} \leq \underbrace{\left| \frac{x}{x+y} \right|}_{K_x} \epsilon_x + \underbrace{\left| \frac{y}{x+y} \right|}_{K_y} \epsilon_y$$

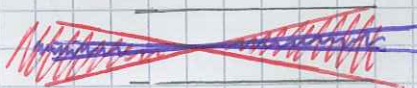
$$K = \max \{ K_x, K_y \}$$

problema NON CONDIZIONATO perché piccoli INGRESSI GRANDI ERRORI

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA



Se sbaglio di poco
Non ci sono problemi
per trovare l'intersezione
PROBLEMA ben CONDIZIONATO



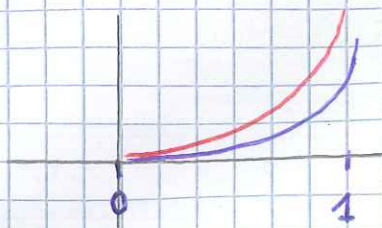
Se sono // il sistema per
trovare l'intersezione non
sarà risolvibile
Sbagliando di poco i coeff.
delle rette vedremo
che sbagliando di tanto
Anco in cui si potrà
trovare il punto di intersezione
sarà sempre più difficile

Per esempio un problema posto ben condizionato potrebbe arrivare ad algoritmi instabili

ALGORITMO STABILITÀ

integrale con variabile m

$$I_m = \frac{1}{e} \int_0^1 x^m e^x dx$$



$$= \frac{1}{e} \left[[x^m e^x]_0^1 - m \int_0^1 x^{m-1} e^x dx \right]$$

$$= \frac{1}{e} \left((e - m) - m \int_0^1 x^{m-1} e^x dx \right)$$

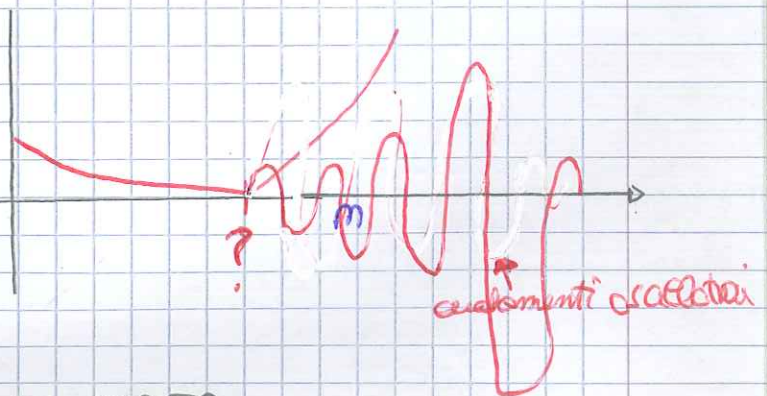
$$I_m = 1 - m I_{m-1} \quad \text{Riusciamo a trovare una certa ricorrenza}$$

$$I_0 = \frac{1}{e} \int_0^1 e^x dx = \frac{1}{e} [e^x]_0^1 = \frac{e-1}{e} \quad \text{CASO BASE}$$

$$I_1 = 1 - 1 \cdot \frac{e-1}{e} = \frac{1}{e}$$

$$\begin{cases} I_m = 1 - m I_{m-1} \\ I_1 = \frac{1}{e} \end{cases} \quad \text{ALGORITMO INSTABILE}$$

Successore per il calcolo dell'integrale in modo iterativo



CALCOLIAMO L'ERRORE

$$I_m = 1 - m I_{m-1} \quad \text{VALORE CORRETTO}$$

$$I_m' = 1 - m I_{m-1}' \quad \text{VALORE CON ERRORE}$$

$$\text{DIFFERENZA } E_m' = -m E_{m-1}'$$

$$\text{L'errore si propaga } E \sim (-1)^m m! E_1$$

$$E_2 = 1 - 2 I_1$$

$$E_3 = 1 - 3 I_2$$

questo è un algoritmo instabile perché abbiamo una relazione divergente

ALGORITMO STABILE

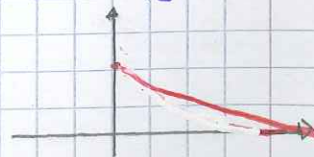
per CALCOLARE I_0 devo conoscere I_1

$$\begin{cases} I_{m-1} = \frac{1 - I_m}{m} \\ I_N ? \end{cases}$$

N molto grande

$$\frac{I_{m+2} - I_{m+1}}{m!} \rightarrow I_{m+2}$$

quindi che il fattoriale va a denominatore quindi errore piccolo



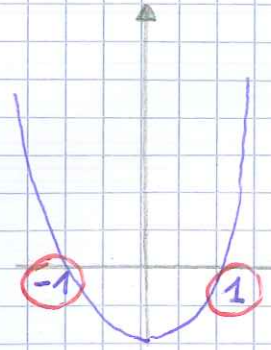
f LINEARE se ① $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ES RETE, AARI
 ② $f(cx) = c f(x)$ ES: $f(x) = 5x + 2$ ASpetto LINEARE ②
 Equivalente dire: $f(0_1 x_1 + 0_2 x_2) = 0_1 f(x_1) + 0_2 f(x_2)$
 $f(x) = x^2 - 1$ → ES: $f(2x) = 4x^2 - 1 \neq 2x^2 - 2$
 NON LINEARE non rispetto proprietà ②

ES RETE, AARI
 ES: $f(x) = 5x + 2$
 $f(2x) = 10x + 4 = 2f(x) = 2(5x + 2)$

4 Aprile

EQUAZIONI NON LINEARI significa curve, non rette

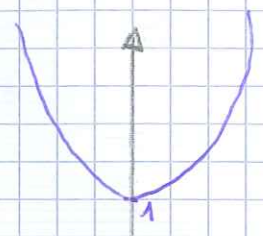
$F(x) = 0$ trovare gli zeri di una equazione NON LINEARE



$F(x) = x^2 - 1$

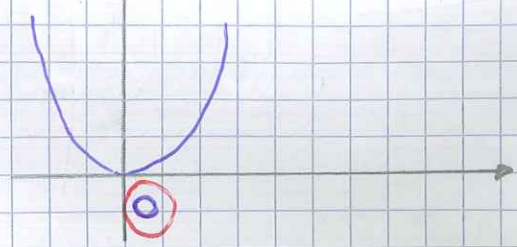
$x = \pm 1$ i 2 zeri della funzione

EQUAZIONE NON LINEARE



$F(x) = x^2 + 1$

Non ha alcuna radice reale



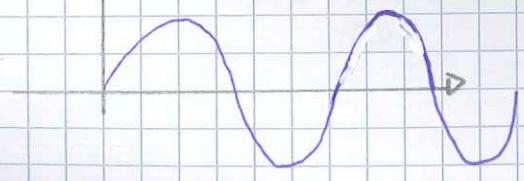
$F(x) = x^2$

$x = 0$

1 radice comune

$F(x) = \sin(x)$

INFINITE radici
 infinite soluzioni



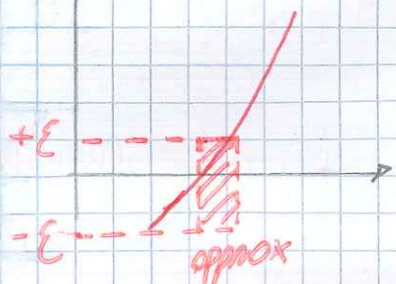
Ricerca degli zeri per via grafica (BRACKETING)

FUNZIONE LINEARE $\rightarrow$ RETTA $F(x) = ax + b$

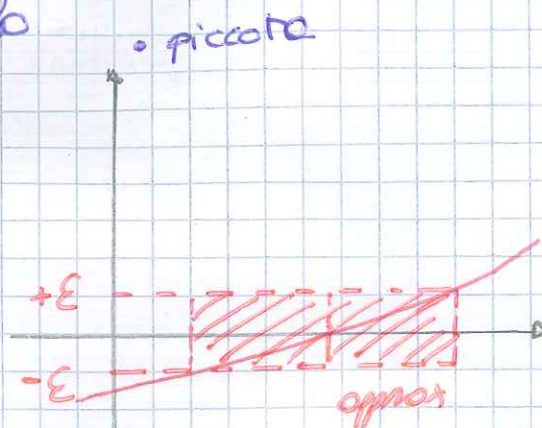
1) SEPARARE RADICI

Più facile CALCOLARE la derivata del 1° grafico, perché
si commette un errore più piccolo

• meno piccolo



BEN CONDIZIONATO



MAL CONDIZIONATO

Se perturbo ϵ errore molto grande

$$F(x) = 0$$

$$P: \alpha = F^{-1}(0)$$

$$L: d = F^{-1}(d)$$

$$F^{-1}(0) - (d - 0) \cdot (F^{-1}(d))' + \text{Ordine superiore}$$

TAYLOR nello zero

$$F(x_1) = F(x_0) + (x_1 - x_0) F'(x_0) + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2!} F''(x_0) + \text{Ordini superiori} \frac{(x_1 - x_0)^3}{3!} \dots$$

$$(F^{-1})' = \frac{1}{F'} \leftarrow \text{LA pendenza di una funzione inversa è uguale ad } 1/\text{pendenza}$$

$$\text{COND.} = |(F^{-1}(0))'| = \frac{1}{F'}$$

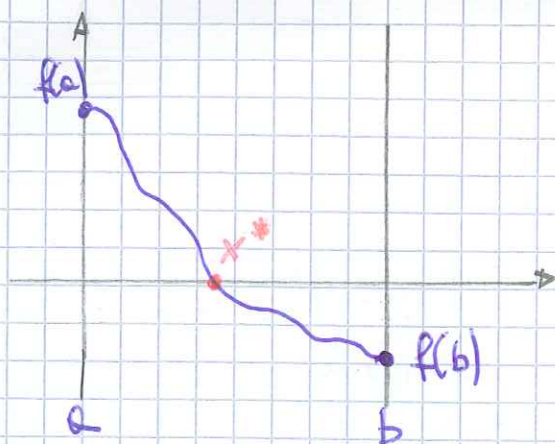
Quindi se la derivata prima è grande significa che il problema è ben posto (**BEN CONDIZIONATO**)

TEOREMA degli zeri funzioni continue

Esistenza: Preso un intervallo $[a, b]$ chiuso di una funzione continua $[a, b]$ $f(a) \cdot f(b) < 0$

$\Rightarrow$ ESISTE ^{SEMPRE} ALMENO un x^* $f(x^*) = 0$

point in cui la funzione si annulla



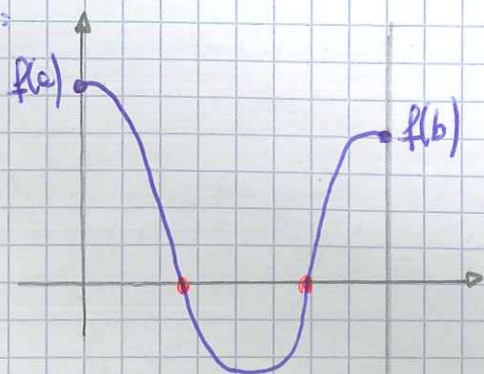
$f(a)$	$f(b)$	$f(a) \cdot f(b)$
+	+	$+ > 0$
+	-	$- < 0$
-	+	$- < 0$
-	-	$+ > 0$

• se $f(a) \cdot f(b) > 0$ ~~$\Rightarrow$~~

NON ci sono RADICI

NON IMPLICA che

ES:



infatti può essere zero radici

UNICITA'

$$\begin{array}{l} f'(x) > 0 \\ f'(x) < 0 \end{array} \parallel \begin{array}{l} f''(x) > 0 \\ f''(x) < 0 \end{array}$$

$\cup$ concavità verso l'alto
 $\cap$ concavità verso il basso