

18 APRILE

SISTEMI LINEARI

FORMULA RIASSUNTIVA

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Ax = b$$

si dice Lineare:

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$

$$f(ca) = cf(a)$$

METODO NUOVO CALCOLO INVERSA

$$Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1}b$$

Troviamo l'inverso della matrice se il determinante di $A \neq 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Scritto per componenti

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \\ x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

Calcolo determinante

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \det = 3$$

$$= +1 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 2 + 1 = 3$$

Nel calcolo dei singoli determinanti devo tener conto dei segni degli indici

(matrice cofattori)

$$\text{Inversa di } A = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} 2 & +1 & -2 \\ -1 & +1 & +1 \\ 1 & -1 & +2 \end{bmatrix}$$

come fare più le trasposizioni

calcoli

$$(-) C_{12} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \det = (-1) \quad (+) C_{22} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \quad (+1)$$

$$(+1) C_{13} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \det = -2 \quad (-) C_{23} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -1 \quad (+1)$$

$$(+1) C_{21} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \det = 4 \quad (+) C_{31} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \quad (+1)$$

Se la matrice 2x2 Applico AGGIUNTA det

INVERSA con $m=2$

AGGIUNTA $a \leftrightarrow b$ e cambio il segno di c-d

in MATLAB l'inverso si usa il comando inv(A)

$$(-) C_{32} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \quad (-1)$$

$$(+1) C_{33} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \quad (+2)$$

$$A^{-1} \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -1/3 & +1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

CALCOLO AUTOVALORI di UNA MATRICE

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -2-\lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$P(\lambda) = (2-\lambda)(1-2\lambda+\lambda^2) + 1$$

polinomio
caratteristico

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 3 = 0$$

in MATLAB

$$\text{root}([-1 \ 4 \ -5 \ 3])$$

Autovalori = sono gli zeri del polinomio caratteristico

$$\lambda_1 = 2,4$$

$$\lambda_2 = 0,76 + 0,79i$$

$$\lambda_3 = 0,76 - 0,79i$$

Spettro = insieme tutti Autovalori

Raggio spettrale = il valore assoluto
le radici con valore
più grande

$$\rho(A) = \max |\lambda_{1,2,3}|$$

$$\lambda_1 = 2,4 \Rightarrow \text{raggio spettrale}$$

MATRICE IN FORMA COMPAGNA

$$A = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ricerchiamo gli Autovalori:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} P_0 - \lambda & P_1 & P_2 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = (P_0 - \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$P(\lambda) = (P_0 - \lambda) \lambda^2 - (-P_1 \lambda - P_2)$$

polinomio
caratteristico

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + P_0 \lambda^2 + P_1 \lambda + P_2$$

Se io fisso il polinomio posso trovare (interamente sempre)
ad una matrice con gli autovalori

Osserviamo che se il nostro vettore di risultati è buono rispetto al nostro vettore di riferimento

$$Ax = b \quad x^* = A^{-1}b \quad x^* \text{ nota (vera)}$$

$$b = A \cdot x^*$$

poi puoi calcolare $Ax = b$ ricalandomi la x

NORMA di VETTORI

Come posso confrontare x da x^* con i vettori si usa la NORMA

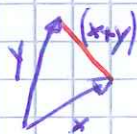
3 PROPRIETÀ della NORMA

$$\frac{\|x_{\text{vera}}^* - x\|}{\|x\|}$$

① Valore ASSOLUTO sempre > 0
NORMA sempre > 0 tranne se $\|x\| = 0$

$$\textcircled{2} \|cx\| = |c| \|x\|$$

$$\textcircled{3} \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \text{disuguaglianza triangolare}$$



La norma di x $\|x\| = \sum |x_i|$

$$x = \begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \\ -3 \end{Bmatrix}$$

$$\|x\|_1 = 11 = |1+2+5+3|$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i|\} = 5 \quad \text{il massimo del valore assoluto tra tutti gli elementi}$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum x_i^2} = \sqrt{39}$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{39}$$

in MATLAB

$$\|x\|_1 = \text{norm}(x, 1)$$

$$\|x\|_\infty = \text{norm}(x, \text{Inf})$$

$$\|x\|_2 = \text{norm}(x)$$

NORMA di MATRICI

Norma di una Matrice = quanto una matrice dista da un'altra matrice

Rispettano le stesse proprietà delle norme di vettori in aggiunta

$$\textcircled{4} \|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

↑ RAGGIO spettrale

ESEMPI di NORME di NORMA:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad \text{Fisso le righe}$$

$$\|A\|_2 = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad \text{Fisso le colonne}$$

Fissato le
Righe
 $\|A\|_\infty$

$$\begin{aligned} (i=1) &= 2 \\ (i=2) &= 3 \\ (i=3) &= 3 \end{aligned}$$

$$\|A\|_\infty = 3$$

Fissato le
Colonne
 $\|A\|_1$

$$\begin{aligned} (j=1) &= 2 \\ (j=2) &= 1 \\ (j=3) &= 5 \end{aligned}$$

$$\|A\|_1 = 5$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A \cdot A^T)}$$

molto lungo da
calcolare per più precisione

Autovale
della matrice prodotto
tra $A \cdot A^T$

è l'autovale
più grande

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2}$$

$$\|A\|_F = 14$$

NORMA FROBENIUS

MATRICI SIMILI $\Leftrightarrow X^{-1} B X = A$

$$A x = y \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1} A x B B^{-1} = A^{-1} y B^{-1}$$

$$x = A^{-1} y B^{-1}$$

$$(AB)^{-1} = A^{-1} B^{-1}$$

$$(AB)^T = A^T B^T$$

vettori:

$$x \cdot y = x^T y \quad \begin{array}{|c|} \hline x^T \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline y \\ \hline \end{array}$$

$$x \perp y \Leftrightarrow x \cdot y = 0 \quad \text{prodotto scalare}$$

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ x \end{array} \begin{array}{c} \nwarrow \\ y \end{array} = x \cdot y \quad \text{prodotto esterno}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline y \\ \hline \end{array}$$

ATTENZIONE

$A^{\wedge 2} \rightarrow$ eleva ogni elemento al quadrato

$A^{\wedge 2} = A : A \rightarrow$ moltiplichiamo la matrice per se stessa

$$x^{\wedge y} = x^y$$

$$A x = b \rightarrow x = A^{-1} b$$

$\rightarrow$ DIRETTI (Gauss) ^{eliminaz.}

$\rightarrow$ ITERATIVI (Jacobi / Gauss) $\rightarrow$ se la soluzione di passo precedente è buona e utile per calcoli lo soluzione di passo successivo

$\rightarrow$ METODI A TERMINAZIONE FINITA (Cinodo di convergenza)

dipende da come è fatta la MATRICE e da quale studio voglio applicare.
• Dipende dal tipo di problema

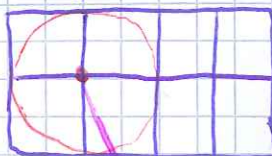
Diverse STRUTTURE della MATRICE A

FORMATO PIENO

dell'ordine $m \cdot m = m^2$ memorizzare tutta la matrice

FORMATO SPARSE

una soluzione dipende soltanto dagli elementi che ci stanno attorno



la temp in questo punto dipende soltanto dagli elementi che ci stanno ATTORNO

$$X = A \setminus b$$



metodo eliminazione Gaussiana

Risolvo sistema lineare

Scegli tu il metodo (Holtz analizza la matrice A e poi usa lui il metodo migliore)

Metodi per velocizzare i RISULTATI

PRODOTTI CON MATRICI DIAGONALI

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & a_{33} & \\ & & & a_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$x_i = \frac{b_i}{a_i}$$

$\text{diag}(x) \Rightarrow$ costruire matrice diagonale

$\text{diag}(A) \Rightarrow$ costruire la sua diagonale

TRIANGOLARE SUPERIORE

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ 0 & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$x_{m-1} = \frac{b_{m-1} - a_{m-1,m} x_m}{a_{m-1,m-1}}$$

PASSO BASE:
 $x_m = \frac{b_m}{a_{mm}}$

COMPRESSITA $O(m^2)$

$$a_{ii} \cdot x_i + a_{i,i+1} x_{i+1} + \dots + a_{i,m} \cdot x_m = b_i$$

$$x_i = (b_i - \sum_{j=i+1}^m a_{ij} x_j) / a_{ii} \quad \text{CASCATA ITERATA} \quad i=m-1, \dots, 1$$

MATRICI ORTOGONALI

$$Ax = b$$

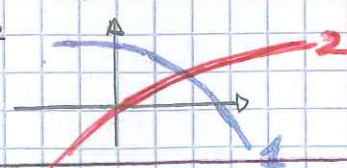
se A ortogonale $A^{-1} = A^T$

$$x = A^{-1}b = A^T b$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

PROBLEMA BEN POSTO

NON sono COMBINAZIONE LINEARE una dell'altro



Im Model vengono usate le librerie **BLAS-OTTIMIZZATE**

(20 Aprile)

$$Ax = b$$

$\det(A) = 0$ COMB. LINEARE

PROBLEMA MAL POSTO

non porta ad alcuna info aggiuntiva

$$\|s_x\| = \|A^{-1}sb\| \leq \|A^{-1}\| \|sb\|$$

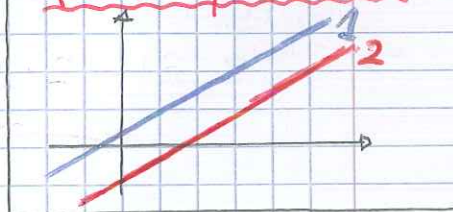
$$\|b\| = \|A \cdot x\| \leq \|A\| \|x\|$$

$$\det \begin{vmatrix} K_a & K_b \\ c & b \end{vmatrix} = 0$$

significa che è una combinazione lineare di 2°

MAL POSTO di 2°

significa che 1 è multiplo per cui rappresenta due piani paralleli



$$\frac{\|s_x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|sb\|}{\|A\| \|x\|}$$

$$\frac{\|s_x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|sb\|}{\|b\|}$$

CONDIZIONAMENTO

$K(A)$ sempre > 1

Se questo numero è molto grande i risultati potrebbero essere poco attendibili perché le equazioni al suo interno sono lin. indipendenti

$$K(A) = \|A\| \|A^{-1}\| \geq \|A \cdot A^{-1}\| = \|I\| = 1$$

Una matrice simmetrica definita positiva

$A > 0$ autovalori tutti positivi

$$K(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$$

Il determinante = prodotto di tutti gli autovalori

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_m$$

Sono importanti le classi delle matrici definite positive

Quando il condizionamento è molto elevato è molto difficile calcolare i risultati perché una piccola perturbazione dei dati in ingresso crea una GRANDE variazione dei risultati $\Rightarrow$ perciò risultati non attendibili

PER CALCOLARE determinante attraverso ELIMINAZIONE di GAUSS

Importante 2 cose:

- non eseguire prodotti/divisioni per una riga semplificabile
- se vengono eseguiti scambi di riga tenere conto attraverso $(-1)^s$

RISOLTO IL SEGUENTE SISTEMA LINEARE

$$s = m' \text{ scambi}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \\ 4x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 28 \\ 2x_1 + 4x_2 + 17x_3 = 31 \end{cases}$$

$$K(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty$$

diversi metodi per calcolare $K(A)$ in base alla forma della matrice

ATTENZIONE ELIMINAZIONE di GAUSS

$$\begin{array}{l} (-2) \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 4 & 3 & 10 & 28 \\ 2 & 4 & 17 & 31 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{21}(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & +4 & +6 \\ 0 & +3 & +14 & +20 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{32}(-3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & +2 & +2 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ SOLUZIONE del sistema lineare attraverso ELIMINAZIONE GAUSS

CALCOLO IL determinante eseguendo il prodotto dei coeff. sulla diagonale

$$\det = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-1)^s = 4$$

$$s = \text{scambi} = 0$$

non abbiamo effettuato scambi

POSSO CALCOLARE VELOCEMENTE il determinante della matrice moltiplicando i termini sulla diagonale

$$\det(A) = 2 \cdot 1 \cdot (2) = +4$$

ATTENZIONE questo vale

Se non vi sono state scambi di righe e divisioni Attenzione dello segno

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 0 & -4 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{scambio tra II e III riga}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{RIGA di AGGIORNAMENTO} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 3 \text{ (II)} \\ 1 & 2 & 1 & 1 \text{ (I)} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\det A = 1$$

FORMULA di AGGIORNAMENTO

$$\text{NUOVA RIGA}_j = \text{VECCHIA RIGA}_j - \left(\frac{a_{jk}}{a_{kk}} \right) \text{RIGA}_k$$

$$\det = 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-1)^s$$

$$s = m' \text{ scambi}$$

APPR. della derivata prima attraverso rapp. incrementale

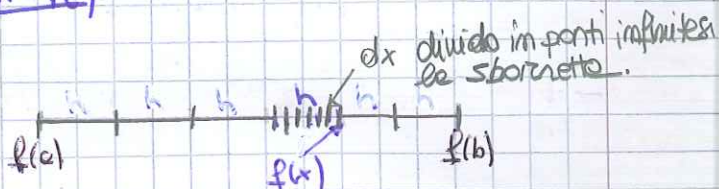
$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

APPR. della derivata seconda

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

passo successivo passo corrente passo precedente

$f(a) = \text{NOTA}$
 $f(b) = \text{NOTA}$



In questo caso si potrà costruire una matrice SPARSA perché moltissimi incogniti saranno = 0

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 & x_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 & x_5 & x_6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(a) \\ f(x) \\ f(b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{NOTO} \\ \text{NOTO} \\ \text{NOTO} \end{bmatrix}$$

-) MATRICE SPARSA: Esempio CALCOLORE le temp. in una sbarra di metallo

↓
cioè le cose in cui ci sono molti zeri per ogni riga

(per il calcolo delle temp.)
Im questo caso ci sono al massimo 3 elementi diversi da 0 (zero) per ogni riga, perciò se decidiamo di fare una discretizzazione di 1000 campioni avremo una matrice di grandezza dell'ordine del milione.

$$O(1000^2) \quad 1000 \cdot 1000 \cdot 8 \text{ byte} \approx 8 \text{ Mega}$$

rapp. doppia precisione

invece per una matrice sparse si utilizza

$$3 \cdot 1000 \cdot 8 \text{ byte} = 24 \text{ 000 byte} \approx 24 \cdot 2^{10} \approx 24 \text{ Kbyte} \ll 8 \text{ Megabyte}$$

$2^{10} \approx 1000$

risparmio notevole di memoria

COMANDI IN MATLAB per FARE questo

$X = A \setminus B$ lavora sia su matrici a formato pieno sia sparse

COMANDO per indicare lavorando su MATRICI SPARSE:

spase (indice riga, indice colonna, elemento, nr righe, nr colonne)

MAI SCRIVERE:

$$X = A \setminus B \quad \Rightarrow \quad X = \text{inv}(A) \setminus B$$

NON IMPERCA

A sparse $\Rightarrow$ A^{-1} sparse

$$\text{inv}(A) = A^{-1}$$

28 MARZO

TRIANGOLO SUPERIORE

$$Ax = b \rightarrow Ux = b^*$$

PASSO $K = 1 \dots N-1$

RIGA di AGGIORNAMENTO

$$RIGA_J = RIGA_J - \left(\frac{a_{JK}}{a_{KK}} \right) RIGA_K \quad K \leq J \leq N$$

puoi esserci
CANC. NUMERICA
QUANDO SOTTRAGGO
2 numeri vicini
Ene PERE

MASSIMIZAZIONE
SCELGO IL MASSIMO
della RIGA

$$J = K+1, \dots, N$$

PIVOTING RIGHE

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 0 & -4 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & -4 \end{array} \right]$$

DECOMPOSIZIONE LU

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRICE di PERMUTAZIONE
SCAMBIÀ riga 1 con riga 2

P = matrice permutazione

$$\text{Quindi } P_1 A x = P_1 b$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & -4 \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1 & 3/2 & -5/2 \end{array} \right]$$

$$L_1 P_1 A x = L_1 P_1 b$$

ora devo scambiare 2° riga con la 3°

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 3/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \end{array} \right]$$

$$\underbrace{L_2 P_2 L_1 P_1 A}_U x = \underbrace{L_2 P_2 L_1 P_1 b}_{b^*}$$

TRIANGOLO SUPERIORE

$$PA = LU$$

Routine Matlab per decomposizione LU

ES: $\text{lu}(A)$ restituisce 3 matrici: $[L \ U \ P]$

$x = A \setminus b \leftarrow$ ESSENE l'ELIMINAZIONE di GAUSS
poi per semplificare esegue l'eliminazione
del'elemento lasciando i termini che
ci interessano nella diagonale

Quando è importante usare la decomposizione LU?

Quando dobbiamo risolvere lo stesso sistema lineare ma
con il termine $b \rightarrow$ cioè termine NOTO che varia

per calcolare la decomposizione LU costa $O(m^3)$

$$Ax = b$$

$$PAx = Pb$$

$$L \underbrace{Ux}_{y} = Pb$$

costo $O(m^3)$

$$\rightarrow \textcircled{1} Ly = Pb$$

$$\textcircled{2} Ux = y$$

La complessità per trovare le
soluzioni di una matrice triangolare

▲ triangolare inferiore

▼ triangolare superiore

Se è nota la decomposizione LU la soluzione di $Ax = b$ si trova risolvendo $\textcircled{1}$ e $\textcircled{2}$

DECOMPOSIZIONE CHOLESKY

Se una matrice è simmetrica e definita positiva

cioè $A = A^T$ $A > 0$, cioè $\lambda > 0$ autovalori tutti > 0

$$A = H \cdot H^T$$

Routine di Matlab per matrici simmetriche definite positive

$\text{chol}(A)$ = restituisce la H^T triangolare inferiore

ESEMPIO in forma MATRICIALE

$$h=1 \quad a_{11} = h_{11}^2 \rightarrow h_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$Ax = b$$

$$H \underbrace{H^T x}_{y} = b$$

$$Hy = b \text{ faccio eliminazione in avanti}$$

$$H^T x = y \text{ faccio eliminazione all'indietro}$$

RISPARMIO SULLA MEMORIA

ESEMPIO METODO CHOLESKY

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 \end{bmatrix}$$

$A = A^T$ la matrice deve essere simmetrica

$A > 0$ definita positiva (non si calcola mai)
Teorema di Sylvester

Se A definita positiva anche i suoi minori lo sono

$$Q_{11} = h_{11} \cdot h_{11} = \sqrt{h_{11}}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} A_{i-1} & r \\ r^T & Q_{ii} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_i & 0 \\ R^T & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_i^T & h \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} r &= H_i \cdot R^T \\ h &= H_i / r \end{aligned}$$

$$A \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & & \\ h_{21} & h_{22} & \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ & h_{22} & h_{23} \\ & & h_{33} \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

OK ho risolto la decomposizione di CHOLESKY

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & h_{12} \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix}$$

$$R_{12} = 1/1 = 1$$

PER CALCOLARE gli elementi nella diagonale

$$Q_{ii} = h^T h \times \beta^2$$

$$\beta = \sqrt{Q_{ii} - R^T R}$$

$$h_{22} = \sqrt{5 - (1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{31} \\ h_{32} \end{bmatrix}$$

$$h_{31} = 1/1 = 1$$

$$h_{32} = \frac{5 - 1 \cdot 1}{2}$$

$$\beta = \sqrt{14 - (1^2 + 2^2)} = 3$$

TROVATA la fattorizzazione:

$$A = H H^T$$

$$A x = b$$

$$H H^T x = b$$

$$\begin{cases} H y = b \\ H^T x = y \end{cases}$$



Il vantaggio rispetto la scomposizione LU la scomposizione di Cholesky ha solo una moltiplicazione di scomposizione

Metodi diretti $\Rightarrow$ VANTAGGIO $\rightarrow$ RAGGIUNGONO SEMPRE ad una SOLUZIONE
Cholesky e LU dopo un numero finito di fasi fattorizzate
 la matrice e permette di risolvere con sicurezza in modo facile
SVANTAGGIO
 se A è sparsa tendono a rompere la matrice $\rightarrow$ se non vogliamo questo possiamo usare metodi ITERATIVI

$$H = \text{chol}(A)$$

$$y = H^T \backslash b$$

$$x = H \backslash y$$

$$x = H \backslash (H^T \backslash b)$$

$\rightarrow$ codice MATLAB per eseguire FATTORIZZAZIONE CHOLESKY

METODI ITERATIVI

Cerco di costruirmi un'iterato di punto fisso

$$Ax = b$$

$$(M - N)x = b$$

$$Mx = Nx + b$$

$$Mx^{(m+1)} = Nx^{(m)} + b$$

$$A = M - N$$

$$x^{k+1} = M^{-1} N x^{(m)} + M^{-1} b$$

$\rightarrow$ fare l'inversa di una matrice costa troppo perciò dobbiamo scegliere

$M = \text{DIAGONALE}$ $\rightarrow$ da origine metodo di Jacobi
 $M = \text{TRIANGOLARE INFERIORE}$ $\rightarrow$ metodo di GAUSS-SEIDEL

$$A = M - N = \text{DIAG}(A) - (-A + \text{diag}(A))$$

JACOBI

METODO JACOBI PER COMPONENTI

$$M = \text{DIAG}(A)$$

$$N = -(A - D)$$

$$x^{k+1} = M^{-1} N x^k + M^{-1} b$$

FORMULA GENERALE di JACOBI

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^m a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

$$x_i^{(k+1)} = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^m \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}$$

$$= \left(b_i - \sum_{j \neq i} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} \right)$$

FORMULA di JACOBI utile per l'implementazione