

Metodi diretti $\Rightarrow$ VANTAGGIO $\rightarrow$ RAGGIUNGONO SEMPRE ad una SOLUZIONE
SVANTAGGIO $\rightarrow$ Cholesky e LU dopo un numero finito di passi fattorizza la matrice e permette di risolvere con facilità
 se A è sparsa tendono a rompere la matrice $\rightarrow$ se non vogliamo questo possiamo usare metodi ITERATIVI

$$Ht = chol(A)$$

$$y = Ht' \backslash b$$

$$x = Ht \backslash y$$

$$x = Ht \backslash (Ht' \backslash b)$$

codice MATLAB per eseguire FATTORIZZAZIONE CHOLSKY

METODI ITERATIVI

Cerco di costruirmi un'iterato di punto fisso

$$Ax = b$$

$$(M - N)x = b$$

$$Mx = Nx + b$$

$$Mx^{(m+1)} = Nx^{(m)} + b$$

$$A = M - N$$

$$x^{k+1} = M^{-1} N x^{(m)} + M^{-1} b$$

$\rightarrow$ fare l'ipotesi di una matrice costa troppo fatica dobbiamo scegliere

$M = \text{DIAGONALE}$ $\rightarrow$ da origine metodo di Jacobi
 oppure $M = \text{TRIANGOLARE INFERIORE}$ $\rightarrow$ metodo di GAUSS-SEIDEL

$$A = M - N = \text{DIAG}(A) - (-A + \text{diag}(A))$$

JACOBI

METODO JACOBI per componenti

$$M = \text{DIAG}(A)$$

$$N = -(A - D)$$

$$x^{k+1} = M^{-1} N x^k + M^{-1} b$$

FORMULA GENERALE di JACOBI

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^m a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

$$x_i^{(k+1)} = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^m \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}$$

$$= \left(b_i - \sum_{j \neq i} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} \right)$$

FORMULA di JACOBI utile per l'implementazione

ESempio Metodo JACOBI

consiste nello isolare la diagonale

$$\begin{cases} 2x_1^{(k+1)} + 3x_2^{(k)} + 4x_3^{(k)} = 1 \\ 2x_1^{(k)} - x_2^{(k+1)} + x_3^{(k)} = 2 \\ 3x_1^{(k)} + 2x_2^{(k)} + x_3^{(k+1)} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1 - 3x_2^{(k)} - 4x_3^{(k)}}{2} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{2 - 2x_1^{(k)} - x_3^{(k)}}{-1} \\ x_3^{(k+1)} = \frac{3 - 3x_1^{(k)} - 2x_2^{(k)}}{1} \end{cases}$$

se avessi tutti zero

$$x^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{x^1} \begin{bmatrix} 1/2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{x^2} \begin{bmatrix} 1 - 3(-2) - 4 \cdot 3/2 \\ * \\ * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/2 \\ * \\ * \end{bmatrix}$$

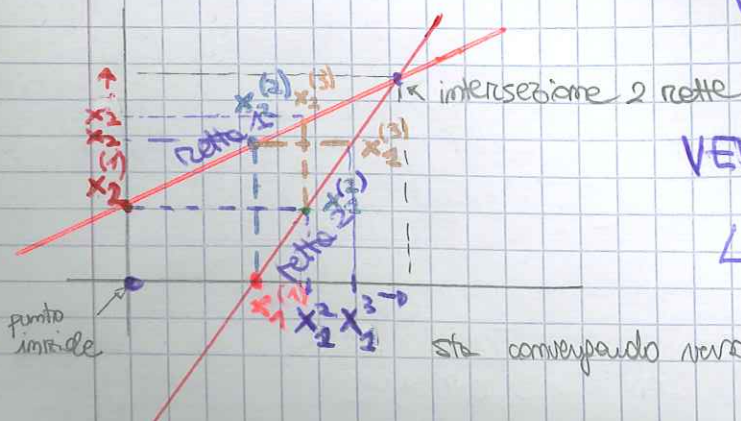
INTERPRETAZIONE GEOMETRICA

retta 1 $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$

retta 2 $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(k)}}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(k)}}{a_{22}} \end{cases}$$

partendo da un vettore $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$



VEDIAMO che questo metodo
CONVERGE verso
LA SOLUZIONE

PER VEDERE QUANDO IL METODO CONVERGE
Amplificando l'errore

$$\begin{aligned} \text{errore}^{k+1} &= x - x^{k+1} = M^{-1} N x + \cancel{M^{-1} b} - M^{-1} N x^k - \cancel{M^{-1} b} \\ &= \underbrace{M^{-1} N}_B (x - x^k) \end{aligned}$$

$$B = M^{-1} N$$

$$\text{errore}^{k+1} = B \text{ errore}^k$$

$$= B(B \text{ errore}^{k-1}) = B^2 \text{ errore}^{k-1} = \dots = B^{k+1} \text{ errore}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} B^m = 0$$

c'è un teorema
che dice che
quando il raggio spettrale < 1
 $\rho < 1$
 $\rho(B) < 1$

Per verificare se il metodo converge calcoliamo $M^{-1} N = B$
e il raggio spettrale (B) deve essere < 1

cioè il valore assoluto
l'autovalevole con il
valore più grande

Spettro = insieme di tutti gli autovalevoli (radici del polinomio caratteristico)

JACOBI

$$X^{(k+1)} = M^{-1} N X^{(k)} + M^{-1} b \quad A = M - N$$

GAUSS-SEIDEL

$$M^{-1} X^{(k+1)} = N X^{(k)} + b$$

$$M = \text{DIAG}(A)$$

metodo Jacobi

$$M = \text{TRIL}(A)$$

metodo GAUSS

JACOBI

$$X_i^{k+1} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^k - \sum_{j=i+1}^m a_{ij} x_j^k}{a_{ii}}$$

GAUSS-SEIDEL

$$X_i^{k+1} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^m a_{ij} x_j^k}{a_{ii}}$$

RAGGIO SPETTRALE

$$\rho(M^{-1}N) < 1$$

RAGGIO SPETTRALE < 1
della matrice di
iterazione

ALLORA il METODO di JACOBI
che quello di GAUSS convergono
più il raggio spettrale è piccolo più
è facile arrivare alla soluzione del sistema
converge

CRITERI di convergenza:

- Se Matrice di partenza A è diagonale dominante sia Jacobi e Gauss
cioè $|a_{ii}| > \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$ per righe

$$\begin{bmatrix} +3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & -7 \end{bmatrix} \begin{matrix} 372 \\ 472 \\ 775 \end{matrix}$$

- Se tutti autovalori positivi della GAUSS-SEIDEL converge
cioè A definita positiva

- Se A è una matrice diagonale a blocchi, e entrambi i
convergono o entrambi divergono

- Se converge:

$$\rho(B_{\text{GAUSS}}) = \rho(B_{\text{JACOBI}})^2 < 1$$

RAGGIO SPETTRALE

se convergono

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi useremo Jacobi converge
più velocemente.

In Alcuni casi un Metodo può convergere e l'altro divergere

ESEMPIO NUMERICO DEI 2 METODI

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & -1 \\ 1 & -7 & 2 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |8| &> |1| + |-1| \\ |-7| &> |1| + |2| \\ |9| &> |2| + |1| \end{aligned}$$

MATRICE diagonale
dominante per
righe

CON METODO JACOBI

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = (8 - x_2^k + x_3^k) / 8 \\ x_2^{k+1} = (-4 - x_1^k - 2x_3^k) / (-7) \\ x_3^{k+1} = (12 - 2x_1^k - x_2^k) / (9) \end{cases}$$

inizio da vettore
NULLA

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 4/7 \\ 4/3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} (8 - \frac{4}{7} + \frac{4}{3}) / 8 \\ (-4 - 1 - \frac{8}{3}) / (-7) \\ (12 - 2 - \frac{4}{3}) / (9) \end{bmatrix}$$

CON METODO GAUSS-SEIDEL

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = (8 - x_2^k + x_3^k) / 8 \\ x_2^{k+1} = (-4 - x_1^{k+1} - 2x_3^k) / (-7) \\ x_3^{k+1} = (12 - 2x_1^{k+1} - x_2^{k+1}) / (9) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -4 - 1 - \dots = 5/2 \\ (12 - 2 - 5) / 9 = \end{bmatrix}$$

PER CALCOLARE RAGGIO SPETTRALE

IN MATLAB:

$$\begin{aligned} B_{\text{jacobi}} &= M^{-1}N & N &= (A - M) \\ M &= \text{diag}(\text{diag}(A)) \\ A &= -(A - M) \\ B_{\text{jacobi}} &= \text{inv}(M) \times N \end{aligned}$$

$$\rightarrow M = \text{TRI}L(A) \rightarrow \text{CALCOLO LA MATRICE TRIANGOLARE DI } A$$

$$\begin{aligned} B_{\text{GAUSS}} &= \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 0 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ M^{-1}N & \quad \quad \quad M^{-1} \quad \quad \quad N \end{aligned}$$

Non esistono routine Matlab che implementano metodi di GAUSS e JACOBI perché sono molto semplici da iterare, ma ne esistono di molto più complessi come PCG...

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA METODO GAUSS SEIDEL

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Applico **GAUSS - SEIDEL**

$$\begin{aligned} \text{retta 1} \quad & x_1^{k+1} = (b_1 - a_{12}x_2^k) / a_{11} \\ \text{retta 2} \quad & x_2^{k+1} = (b_2 - a_{21}x_1^{k+1}) / a_{22} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ (b_2 - a_{21} \cdot b_1/a_{11}) / a_{22} \end{bmatrix}$$

