

Approssimazione dei Minimi quadrati

Vogliamo risolvere sistema non quadrato, cioè RETTANGOARE

$$Ax = b \quad A \text{ non quadrata}$$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

$$R \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$Q^T = Q^{-1}$$

R triangolare superiore



Con Matrici quadrate posso trovare una fattorizzazione QR

$$A = Q \cdot R$$

in MATLAB
 $[Q, R] = qr(A)$

per far questo usiamo il riflettore di HOUSEHOLDER

$$H(v) = I - 2 u \cdot u^T \quad \text{dove} \quad u = \frac{v}{\|v\|_2}$$

$$= I - \frac{2}{\|v\|_2^2} v \cdot v^T$$

interpretazione geometrica del prodotto

$$y = H(v) x$$

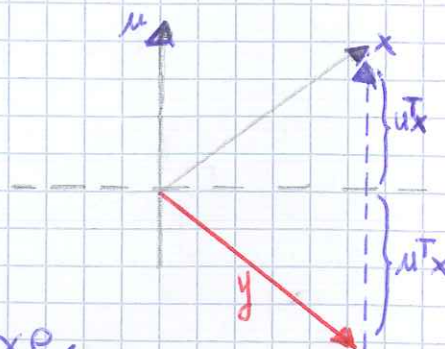
$$y = (I - 2 u u^T) x$$

$$= x - 2 u u^T x = x - 2 (u^T x) u$$

$$\boxed{} \boxed{} \boxed{} = \boxed{}$$

sottrazione

$$y + 2(u^T x) u = x$$



$u^T x$ = proiezione di x riferendo lungo il piano perpendicolare al vettore

scopo di tutto ciò $Hx = \alpha e_1$
 un coefficiente

$$H \cdot x = e_1$$

Verifichiamo che valore deve avere la matrice H

Ricerca delle proprietà di H

$$\textcircled{1} H^T = (I - 2uu^T)^T = I - 2(u^T)^T \cdot u^T = I - 2uu^T = H$$

significa che $H = H^T$

La matrice H è simmetrica
1^a proprietà

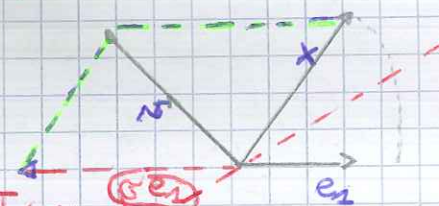
$$\begin{aligned} \textcircled{2} H^2 &= H H^T = (I - 2uu^T)^T (I - 2uu^T) \\ &\stackrel{I = \text{identità}}{=} (I - 2uu^T)^T (I - 2uu^T) \\ &\stackrel{\|u\|_2^2 = 1}{=} I - 4uu^T + 4uu^Tuu^T \\ &= I - 4uu^T + 4uu^T \\ &= \text{Identità} \end{aligned}$$

significa

$$H^{-1} = H^T = H$$

2^a proprietà di H

il prodotto di 2 vettori
ortogonali è uguale
a uno



One calcolo la norma $\|Hx\|_2^2 = (Hx)^T (Hx)$

lo elevo al quadrato per poter fare

$$\|z\|_2^2 = \sum_i z_i^2 = z^T \cdot z$$

Se ruoto un vettore la norma non deve cambiare
cioè la sua lunghezza

$$\begin{aligned} &= x^T H^T H x = x^T x = \|x\|_2^2 \end{aligned}$$

$v = x + \sigma e_1$ Problema Calcolare sigma (σ)

$$H(v)x = \alpha e_1$$

$$\alpha^2 = \|x\|_2^2$$

$$H(v)x = \left(I - \frac{2}{\|v\|_2^2} v \cdot v^T\right) x$$

$$= x - \frac{2}{\|v\|_2^2} (v^T x) v$$

$$\|v\|_2^2 = v^T v = (x - \sigma e_1)^T (x + \sigma e_1)$$

$$= x^T x + x^T \sigma e_1 + \sigma e_1^T x + \sigma^2 e_1^T e_1$$

$$= \|x\|_2^2 + 2\sigma x_1 + \sigma^2$$

$$\|v\|_2^2 = \|x\|_2^2 + 2\sigma x_1 + \sigma^2$$

$$\|v\|_2^2 = \alpha^2 + 2\sigma x_1 + \sigma^2$$

$$\begin{aligned}
 v^T x &= (x + c e_1)^T x \\
 &= x^T + c^T e_1^T x \\
 &= \|x\|_2^2 + c^T x_1
 \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned}
 H(v)x &= \left(I - \frac{2}{\|v\|_2^2} v v^T \right) x \\
 &= x - \frac{2}{\|v\|_2^2} (v^T x) v \\
 &= x - 2 \frac{(\|x\|_2^2 + c^T x_1)}{(\|x\|_2^2 + 2c^T x_1 + c^T)} v = \alpha e_1
 \end{aligned}$$

Sono d'altranto la 1^a componente della 2^a componente in più
 Sono tutti 0 per ogni scelta del componente x possibile

$$x_i - 2 \frac{(\|x\|_2^2 + c^T x_1)}{\|x\|_2^2 + 2c^T x_1 + c^T} x_i = 0$$

$$2\|x\|_2^2 + 2c^T x_1 = \|x\|_2^2 + 2c^T x_1 + c^T$$

$$c^T = \|x\|_2^2$$

per $i = 1$

$$x_1 - 2 \frac{(c^T + c^T x_1)}{c^T + 2c^T x_1 + c^T} (x_1 + c^T)$$

$$\frac{2(c^T + c^T x_1)}{2(c^T + c^T x_1)}$$

$$x = [-2, -1, 2]^T$$

$H = ?$
 $Hx = ?$
 $Hw = ?$

$$H = I - 2uu^T$$

$$u = \frac{v}{\|v\|_2}$$

$$H = I - \frac{2}{\|v\|_2^2} v \cdot v^T$$

$$v = x + G e_1$$

$$G^2 = \|x\|_2^2 \begin{cases} G = +\|x\|_2 \\ G = -\|x\|_2 \end{cases}$$

$$Hx = G e_1$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$$

$$G = \begin{cases} +3 \\ -3 \end{cases}$$

$$G_{\text{segno}(x_1)} = \|x\|_2$$

In questo caso $e_1 = -2$ allora prendo $G = -3$ per evitare
 cancellazione numerica

$$G = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ +2 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ +2 \end{bmatrix}$$

$x + G e_1$ v

$$\|x\|_2 = 3$$

$$G = -3$$

$$\|v\|_2 = 30$$

$$H = I - \frac{2}{\|v\|_2^2} v v^T = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{30} \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ +2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -1 & +2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 25 & 5 & -10 \\ 5 & 1 & -2 \\ -10 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$Hx = Ix - \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 25 & 5 & -10 \\ 5 & 1 & -2 \\ -10 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = G e_1$$

G $G e_1$

$$Hw = \left(I - \frac{2}{\|v\|_2^2} v v^T \right) w$$

$$= w - \frac{2}{\|v\|_2^2} (v^T w) \cdot v$$

Se usiamo questa formula
per fare il calcolo della
fattorizzazione QR senza
eseguire calcoli sulle matrici, ma
solo sui vettori

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{2}{30} \begin{bmatrix} -5 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{15} \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

↔ vale solo per il 1° termine

$$H = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & & \\ 0 & & \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

voglio rendere 0
l'elemento x per
farla diventare triangolare
superiore

Per rendere tutti 0 devo procedere per passi.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & 10 & 11 \\ 0 & 12 & 13 \\ 0 & 14 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & 10 & 11 \\ 0 & * & 17 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

triangolare superiore

In 3 passi Rendo triangolare la Matrice cancellandoci
ogni volta una riga H

12 MAGGIO

$$H(v) = I - \frac{2}{v^T v} v v^T$$

$$v = x + \sigma e_1$$

$$\sigma = \text{sign}(x_1) \|x\|_2$$

$$H(v) \cdot x = -\sigma e_1$$

$$H(v)w = w - \frac{2}{\|v\|_2^2} (v^T w) v$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 1 & 12 & -2 \\ 1 & 12 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

PASSO 0 $H_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 1 & 12 & -2 \\ 1 & 12 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -9 & 2 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 4 \\ 0 & -5 & 2 \end{bmatrix}$

PASSO 1 $\begin{bmatrix} 3 & -9 & 2 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 4 \\ 0 & -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -9 & 2 \\ 0 & -15 & -2 \\ 0 & 0 & 16/5 \\ 0 & 0 & 12/5 \end{bmatrix}$

PASSO 2 RIMANE IMBROGLIATO

infine dove risultano triangolare superiore.

diagonalizzato questo ponte

PASSO 0

$$x = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$$

- $\|x\|_2 = \sqrt{x^T \cdot x} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$
- $\text{sign}(x_1) = \text{sign}(1) = 1$
- $\sigma = 1 \cdot 2 = 2$

TROV IL VALORE della due colonne

$$v = x + \sigma e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \|v\|_2^2 = v^T v = 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 12$$

$$w = [-3 \ 12 \ 12 \ -3]^T$$

$$H_1(v)w = \begin{bmatrix} -3 \\ 12 \\ 12 \\ -3 \end{bmatrix} - \frac{2}{12} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -3 \\ 12 \\ 12 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow w = [-4 \ -2 \ 2 \ 0]^T$$

PASSO 1

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 10 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{10^2 + 10^2 + (-5)^2} = 15$$

$$\text{sign}(x) \|x\|_2 = 1$$

$$\sigma = 15$$

$$H_2 \cdot \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 10 & 4 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -2 \\ 0 & 16/5 \\ 0 & 12/5 \end{bmatrix}$$

$$v = [25 \ 10 \ -5]^T$$

$$\|v\|_2 = 750$$

$$\|v\|_2^2 = 25^2 + 10^2 + (-5)^2 = 750$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{2}{25} \begin{bmatrix} 25 \\ 10 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 16/5 \\ 12/5 \end{bmatrix}$$

$$w = [0 \ 4 \ 2]^T$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \text{Identita} & 0 \\ \hline 0 & H \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline 0 & \tilde{A} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{H_1} \left[\begin{array}{c|c} 1 & -3 & -4 \\ \hline 1 & 12 & -2 \\ 1 & 12 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} -2 & -9 & 2 \\ \hline 0 & -15 & -2 \\ 0 & 0 & 16/5 \\ 0 & 0 & 12/5 \end{array} \right]$$

$m \times m$ A R non
avere colonne

una delle diagonali
puote fare

Una diagonale

PASSO 2

$$X = \begin{bmatrix} 16/5 \\ 12/5 \end{bmatrix}$$

$$X = [16/5 \ 12/5]^T$$

$$\|X\|_2 = \sqrt{(16/5)^2 + (12/5)^2} = 4$$

$$\text{norm}(X) = 1$$

$$\sigma = 1 \cdot 4 = 4$$

$$H_3 \cdot A = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Una cerchio H_3

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{H_1} \left[\begin{array}{c|c} 1 & -3 & -4 \\ \hline 1 & 12 & -2 \\ 1 & 12 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} -2 & -9 & 2 \\ \hline 0 & -15 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] R$$

Q^T A

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 & -3 & -4 \\ \hline 1 & 12 & -2 \\ 1 & 12 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} -2 & -9 & 2 \\ \hline 0 & -15 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & -3 & -4 \\ \hline 1 & 12 & -2 \\ 1 & 12 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{array} \right]$$

H_3 H_2 H_1 R A

$$\tilde{H}_3 \cdot \tilde{H}_2 \cdot \tilde{H}_1 \cdot A = R$$

GRAZIE alla proprietà

$$\begin{bmatrix} H^{-1} = H \\ H^T = H \end{bmatrix}$$

$$A = \tilde{H}_1 \tilde{H}_2 \tilde{H}_3 R = (\tilde{H}_3 \tilde{H}_2 \tilde{H}_1)^T R$$

TRAVATA la fattorizzazione $A = Q \cdot R$

IN MATLAB il comando è `qr` (la fattorizzazione compiuta da MATLAB potrebbe differire rispetto di poco fatta da noi)

Sipuo dimostrare che è univoca la fattorizzazione

ESISTE anche una FATTORIZZAZIONE QR ridotta

$$\begin{matrix} \boxed{} \\ m \times m \end{matrix} = \begin{matrix} \boxed{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}} \\ m \times m \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \boxed{\begin{smallmatrix} \nearrow \\ 0 \\ \vdots \end{smallmatrix}} \\ m \times m \end{matrix}$$

tiene conto che tutti i termini vengono moltiplicati per zero

In Matlab per calcolare gli autovalori si serve della fattorizzazione QR e della SVD [decomposizione dei singolari]

In Matlab $[M_1 M_2 M_3] = SVD(A)$

↑
rappresenta 3 matrici

$$\begin{matrix} \boxed{} \\ m \times m \end{matrix} = \begin{matrix} \boxed{} \\ m \times m \\ \text{autovalori} \\ \text{di } A \cdot A^T \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \boxed{} \\ m \times m \end{matrix}$$

La decomposizione SVD si può applicare per comprimere le immagini

Questi metodi che fattorizzano le matrici rettangolari servono per risolvere il **problema dei minimi quadrati**