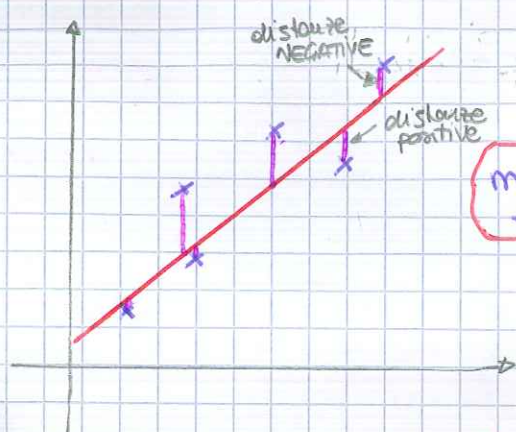


16 MAGGIO

RETTE MINIMI QUADRATI POLINOMIO PRIMO GRADO

(x_i, y_i) Voglio calcolare quella retta che interseca i punti minimizzando lo scarto quadratico



polinomio
 $P(x) = a_0 + a_1 x$

$$\min_{\{a_0, a_1\}} S = \sum_{i=1}^m (a_0 + a_1 x_i - y_i)^2$$

Esprimo il quadrato per non avere problemi di SEGNO

per calcolare il minimo della sommatoria
Esprimo la derivata

$$\frac{dS}{da_0} = 2 \sum_{i=1}^m (a_0 + a_1 x_i - y_i) \cdot 1 = 0 \quad \text{derivata} = 0 \quad \text{trovo punto minimo}$$

$$\frac{dS}{da_1} = 2 \sum_{i=1}^m (a_0 + a_1 x_i - y_i) \cdot x_i = 0$$

$$\begin{cases} a_0 \sum_{i=1}^m 1 + a_1 \sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^m x_i + a_1 \sum_{i=1}^m x_i^2 = \sum_{i=1}^m x_i y_i \end{cases}$$

IN FORMA MATRICIALE

$$\begin{bmatrix} m & \sum_{i=1}^m x_i \\ \sum_{i=1}^m x_i & \sum_{i=1}^m x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m y_i \\ \sum_{i=1}^m x_i y_i \end{bmatrix}$$

ORA AGGIUNGO il termine a_2 **POLINOMIO GRADO DUE**

$$\min_{\{a_0, a_1, a_2\}} S = \min_{\{a_0, a_1, a_2\}} \sum_{i=1}^m (\underbrace{a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2}_{\text{MODELLO}} - \underbrace{y_i}_{\text{DATI}})^2$$

$$\frac{dS}{da_0} = 2 \sum_{i=1}^m (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i) \cdot 1 = 0$$

$$\frac{dS}{da_1} = 2 \sum_{i=1}^m (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i) \cdot x_i = 0$$

$$\frac{dS}{da_2} = 2 \sum_{i=1}^m (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i) \cdot x_i^2 = 0$$

IN FORMA MATRICIALE

$$\begin{bmatrix} m & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \end{bmatrix} \quad A^T y$$

Risolvendo questo sistema calcolo il minimo scarto quadratico medio che interpola i miei punti

Mel caso generale:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = z$$

come faccio a ridurre A a quella sopra

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_m^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_m \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_m^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^2 \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_m & \dots & x_m^2 \end{bmatrix}$$

$3 \times m$ $m \times 3$
 MATRICE VANDERMONDE

PER RISOLVERE il polinomio di interpolazione da minimo quadratico di grado 3

$$A^T A \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = A^T y \quad \text{termini noto} \Rightarrow \text{risolvere attraverso Cholesky}$$

simmetrica
definita positiva

Quindi fornito il grado del polinomio con cui voglio approssimare i miei dati, basta costruirsi la matrice di VANDERMONDE ed eseguire i prodotti

PROBLEMA!!!

Il condizionamento di $(A^T A)$ $\approx$ condizionamento di (A) , quindi il condizionamento peggiore al prodotto al quadrato, quindi non dobbiamo lavorare sulla matrice $A^T A$ ma sulla matrice A .

$$\min_{\{x\}} S = \min \|Ax - y\|_2^2 = \|Ax - b\|_2^2$$

quindi un problema di interpolazione si riduce a calcolare il minimo della norma al vettore di x

$$\min_{\{x\}} \|Ax - b\|_2^2 = ?$$

Posso applicare la decomposizione QR PROBLEMA

$$A = QR$$

$$Q^T = Q^{-1}$$

$$Q^T Q = I$$

$$\boxed{} = \boxed{} \boxed{}$$

$$\|Qx\|_2^2 = \|Qx\|^T Qx = x^T Q^T Qx = x^T x = \|x\|_2^2$$

$$\|QA\|_2 = \sqrt{\lambda(QA)^T QA} = \sqrt{\lambda(A^T A)} = \|A\|_2$$

Avevo le matrici ... con proprietà ORTOGONALI come questa, il mio problema ... non è più difficile (LA CONDIZIONABILITÀ)

perché

senza aumentare il condizionamento

Q per un vettore non varia la sua lunghezza

$$\min_x \|Ax - b\|_2^2 = \|QRx - b\|_2^2 = \|Q(Rx - Q^T b)\|_2^2$$

TRANSFORMAZIONE SUPERIORE

$$\begin{bmatrix} R_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix}$$

$$= \|Rx - \underbrace{Q^T b}_c\|_2^2$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} R_1 x - c_1 \\ \vdots \\ c_2 \end{bmatrix} \right\|_2^2 = \|R_1 x - c\|_2^2 + \|c\|_2^2$$

$$x = R_1 \setminus c_1$$

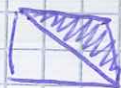
È risolto il problema di Approssimazione
RISOLTO il sistema $R_1 x = c_1$

Quindi per avere un'approimazione mediante un polinomio dei miei dati

$(x_i, y_i) \rightarrow A = QR$ TRIANGOLARE superiore
DATO tutti i punti

$$C = Q^T b$$

$$R_1 X = C_1$$



Ma risolvo il problema dei MINIMI QUADRATI
 attraverso decomposizione BSD

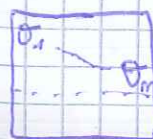
caratteristiche (proprietà):

$$A = U \Sigma V^T$$

$$U^T U = I$$

$$V V^T = I$$

Σ diag



$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq 0$$

$$\sigma_1^2 = \lambda(A^T A)$$

$$\begin{aligned} \min_x \|Ax - b\|_2^2 &= \|U \Sigma V^T x - b\|_2^2 \\ &= \left\| \underbrace{\Sigma V^T x}_{z} - \underbrace{U^T b}_d \right\|_2^2 \\ &= \|\Sigma z - d\|_2^2 \end{aligned}$$

$$\|\Sigma z - d\|_2^2 = \left\| \begin{bmatrix} \sigma_1 z_1 - d_1 \\ \sigma_2 z_2 - d_2 \\ \vdots \\ \sigma_m z_m - d_m \end{bmatrix} \right\|_2^2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \sigma_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}$$

$$A = U \Sigma V^T$$

$$d = U^T b$$

$$z = d_1 / \sigma_i$$

$$X = V Z$$

$$(x_i, y_i) \rightarrow A = U \Sigma V^T$$

$$d = U^T b \quad z = \frac{d_i}{\sigma_i} \quad \begin{matrix} x = V z \\ y = V z \end{matrix}$$

più variabili che equazioni

Righe > COLONNE

$$\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quindi risolvere la soluzione con QR o con SVD la soluzione risultano uguali, ma numericamente si preferisce usare la SVD

Metodo proposto in esempio $A \backslash b$ viene chiamato la **QR**
risolvere **problema minimi quadrati**

COLONNE > Righe

più equazioni che variabili
finiti fino variabili a zero

$$\begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -R_1 \\ & & & \end{bmatrix}$$

SVD dà la soluzione con minimo minimo
QR trova soluzioni con più zeri

QUANDO COLONNE > Righe

In questo caso MATLAB chiama la QR (soluzioni con più zeri)