

RISOLUZIONE dello SCARTO

MATRICE VANDERMONDE:

$$P(m) = a_0 + a_1 x_m^1 + \dots + a_m x_m^m$$

$$\min_{\{a_0, a_1, \dots, a_m\}} \sum_{i=1}^n (P_m(x_i) - y_i)^2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^m \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & \dots & x_m^m \end{bmatrix}$$

3 metodi $\rightarrow A^T A x = A^T y$ con CHOLESKY
 $\rightarrow$ QR
 $\rightarrow$ SVD

ISTRUZIONI MATLAB:

$$A^T A x = A^T y$$

$$A \backslash A = A' \times A$$

$$A \backslash y = A' \times y$$

$$R = \text{chol}(A \backslash A) \text{ con MATLAB}$$

$$A \backslash A x = A \backslash y$$

$$\Delta \nabla x = \square$$

$$x = R \backslash (R' \backslash A y)$$

In Matlab per eseguire comando **POLYVAL(...)** come parametri vuole il polinomio in ordine decrescente.

Per "invertiti" (ordinati in senso contrario) uso **OFFF = x(end:-1:1)**

ESEMPIO se voglio valutare il polinomio $y = x^3 + 2x - 3$

$$\text{polyval}([1 \ 0 \ 2 \ -3],$$

refinito al
termine x^3

$$x = [\dots]'$$

$$y = [\dots]'$$

$$A = [x.^0 \ x.^1]$$

$$A \in \mathbb{R}^{M \times N}$$

• per minimizzazione per scarti con la QR

$$\min \|Ax - b\|_2^2 \quad \|Rx - \underbrace{Q^T b}_C\|_2^2$$

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

$$R_1 x - C_1 = 0$$

ISTRUZIONI MATLAB

$$[Q, R] = \text{qr}(A)$$

$$C = Q' \cdot b$$

$$R_1 = R(1:2, 1:2)$$

$$C_1 = C(1:2)$$

$$x = R_1 \backslash C_1 \quad \text{risolve triangolare superiore}$$

• minimizzazione per scarti con la SVD

$$\min \|Ax - b\|_2^2$$

$$\|V \Sigma V^T x - b\|_2^2$$

$$\| \underbrace{\Sigma}_{t} \underbrace{V^T x}_{d} - U^T b \|_2^2$$

$$A \in \mathbb{R}^{M \times N}$$

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M \times M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \circ & & \\ & \circ & \\ M \times M & & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \times N \end{bmatrix}$$

$$[U, S, V] = \text{svd}(A)$$

$$s = \text{diag}(S)$$

$$d = U' \times y$$

$$z = d ./ s$$

$$x = V : z$$

La QR e la SVD danno lo stesso risultato, ma la SVD è più accurata, mentre la QR è meno costosa.

che vogliamo risolvere un problema dei minimi puschdi
 con un sistema sottodeterminato cioè più variabili che
 equazioni COLONNE > RIGHE

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

FORMA MATRICIALE

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 4} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

per risolverlo dobbiamo minimizzare la norma

$$\min_x \|Ax - b\|_2^2$$

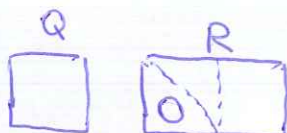
possiamo esprimere la QR

$$[Q, R] = \text{qr}(A)$$

$$Q = 2 \times 2$$

$$R = 2 \times 4$$

$$C = Q^T b$$



$$R_1 x_1 = c$$

$$x = \text{zeros}(4, 1)$$

$$x(1:2) = x_1$$

RISULTA $x = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ SOLUZIONE con LA QR

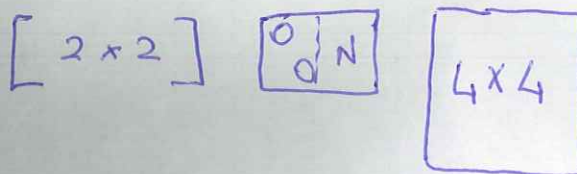
La soluzione con la QR è quella che contiene più zeri. (+ spara)

Ma anche la x calcolata dalla SVD $x = [-1/2 \ 2/3 \ 1/2 \ 1/3]$

Questa soluzione è quella con norma MINIMA
 comando Matlab

$$[U, S, V] = \text{svd}(A)$$

$$d = U^T x b$$



$$S = \text{diag}(s)$$

$$z = d ./ s$$

$$x = V \cdot \begin{bmatrix} z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{SOLUZIONE con NORMA MINIMA}$$

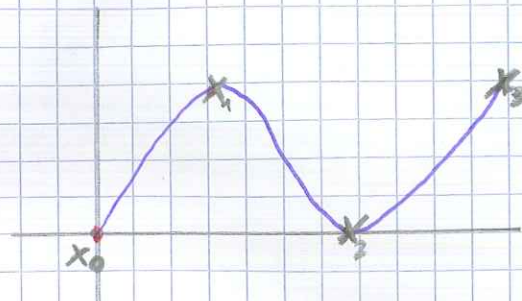
VOGLIO CALCOLARE IL POLINOMIO che si
AVVICINANO al meglio ai punti che
consideriamo ai Simboli dati

Il polinomio voluto avrà la forma $P(x) = a + bx^3$

$$P(x_i) = a + b x_i^3$$

$$S = a + b x_i^3 - y_i$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1^3 \\ 1 & x_2^3 \\ 1 & x_3^3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$



Per fare ciò devo risolvere un problema di INTERPOLAZIONE

Perché il problema sia ben posto x_i devono essere tutti diversi

~~Ed ogni punto x deve corrispondere ad un preciso~~

Per ogni $N+1$ punti il polinomio sarà di GRADO N .

Infatti per $\overset{\text{seho 2 punti}}{x=2}$ verrà approssimato da una retta

per 3 punti verrà approssimato da una funzione quadratica

...

A
quadratica
non SINGOLARE

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^N \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

perché tutti punti
di stinti

$$A^T A x = A^T y$$

$$(A^T A)^{-1} A^T A x = (A^T A)^{-1} A^T y$$

$\Rightarrow$ posso risolvere il sistema lineare
eseguendo

$$Ax = y \Rightarrow \text{attraverso la QR}$$

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m$$

GRADO (N)

IN MATLAB risolvo il problema dell'interpolazione polinomiale
attraverso polipit

STORICAMENTE È STATO RISOLTO IL PROBLEMA

$$p_N(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_Nx^N$$

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_1 + \dots + a_Nx_1^N = y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + \dots + a_Nx_2^N = y_2 \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_{N+1} + \dots + a_Nx_{N+1}^N = y_{N+1} \end{cases}$$

⇒ si riconduce a risolvere un sistema

$$\boxed{Ax = y}$$

scritto in forma
MATEMATICALE

$$P_m(x) = \sum_{i=0}^{N+1} y_i L_i(x)$$

$$L_i(x_i) = 1$$

$$L_i(x_j) = 0$$

$$P_m(x_j) = \sum_{j=0}^{N+1} y_j L_j(x)$$

PER CALCOLARLA ANALITICAMENTE

$$L_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N+1} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)}$$

ESegue la costruzione interpolando
il punto j
FORMA di LAGRANGE
di INTERPOLAZIONE

Con dati i punti $A(0,3)$, $B(1,6)$, $C(-1,2)$

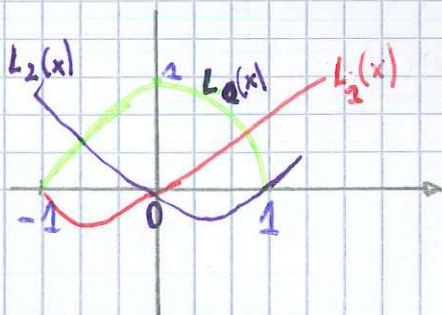
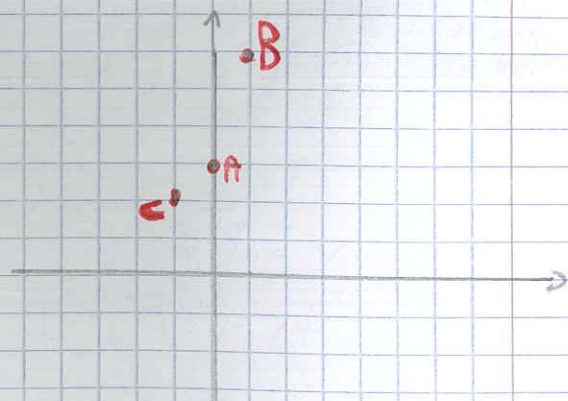
Vogliamo calcolare il polinomio di GRADO 2 che
interpoli i 3 punti.

VALUTATO
in $x=0$

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(0-1)(0+1)} = 1-x^2$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x+1)}{(1-0)(1+1)} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$



$$p_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

$$= 3(1-x^2) + 6 \frac{1}{2}(x^2+x) + 2 \frac{1}{2}(x^2-x) = \boxed{x^2 + 2x + 3}$$

polinomio che interpola
i 3 punti A, B, C

POSSIAMO CALCOLARE ERRORE presa una funzione f

$$E(x) = f(x) - P_m(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n+1} (x-x_i) \leq \frac{M}{(n+1)!} h^{n+1}$$

h = Spaziatura
PER punti EQUISPACIATI

PER punti EQUISPACIATI

$$\max |E(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \right| \frac{h^{n+1}}{4(n+1)}$$

ANCHE LA DERIVATA
della curva d'errore
non è costante

tende a zero
 $\rightarrow 0$

però non è sempre vero che all'aumentare dei punti per
Approssimare la funzione l'errore tende
all'interpolazione

la $\|f - P_N(x)\|_\infty \xrightarrow{\text{sempre}} 0$ NON È SEMPRE VERO

dato una funzione che errore di approssimazione compio per approssimare il polinomio.

Questo dipende dalla derivata $m+1$ esima derivata

$$f(t) = \sin(\omega t)$$

$$f'(t) = \omega \cos(\omega t)$$

$$f''(t) = -\omega^2 \sin(\omega t)$$

ES: la funzione di RUNGE $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ NEGLI INTERVALLI

$[-5, 5]$ diverge

$[-1, 1]$ converge

Perciò quando abbiamo dei dati sperimentali NON calcoliamo
utilizzando tutti i punti, ma cerchiamo soltanto i punti che mi interessano

ES: prendo 5 punti di interpolazione centrati nel punto di
valore zero richiesto, importante prendere un sotto intervallo di punti, importante

che il punto di valutazione sia contenuto nell'intervallo
e soprattutto sia centrato nell'intervallo, minimizzando la derivata

$$E(x) = f(x) - P_m(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} \prod_{j=0}^{N+1} (x - x_j)$$

$$f(x) = \lg(x) \quad P(1,09)$$

x_i	$f(x_i)$
1	0
1.1	$\lg(1.1)$
1.2	$\lg(1.2)$

CALCOLO dell'ERRORE

con $N=2$ grado 2

$$f(x) = \lg x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

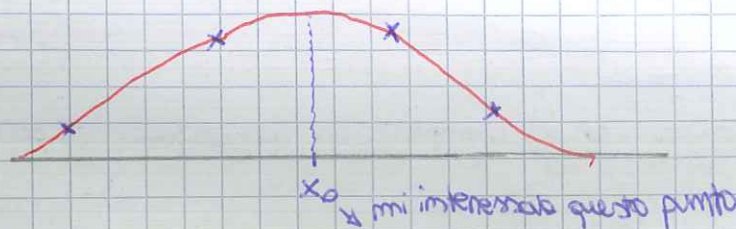
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$\max |f^{(N+1)}(\xi)|$$

$$\text{ERRORE interpolazione} \leq \frac{2}{3!} \underbrace{(1.09 - 1)}_{9 \cdot 10^{-2}} \underbrace{(1.09 - 1.1)}_{10^{-2}} (1.09 - 1.2)$$

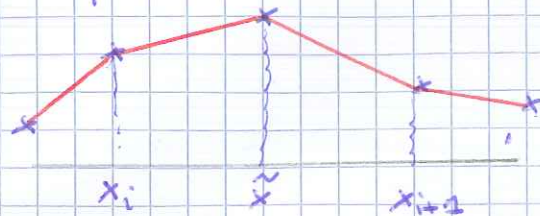
ERRORE dell'ordine 10^{-5} Buono



COMANDO MATLAB: SPLINE

SPLINE LINEARI (INTERPOLAZIONE LINEARE)

interpolo tutti i punti attraverso rette (polinomio a un grado fisso) in un intervallo preciso



$$S|_{(\bar{x}_i, x_{i+1})} \in \mathbb{R}^3$$

$$s = \sum_k y_k \alpha_k(x)$$

$$= y_i \frac{(x - x_{i+1})}{(x - x_{i+1})} + y_{i+1} \frac{(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)}$$

Quindi su ogni singolo intervallo ci sono polinomi di grado (1)

SPLINE CUBICHE (interpolazione lineare)

Quindi su ogni singolo intervallo interpolo i punti attraverso polinomi di grado 3

$$S|_{(\bar{x}_i, x_{i+1})} \in \mathbb{R}^3$$

$$S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$$

centro la spline nel punto x_i

$$S_i(x) = a_i (x - x_i)^3 + b_i (x - x_i)^2 + c_i (x - x_i) + d_i$$

$$\left\{ x_i \right\}_{i=1}^m \quad \begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ x_i \quad x_{i+1} \quad x_{i+2} \end{array}$$

$$4x / (m-1) \Rightarrow \text{GRADI di LIBERTÀ}$$

impongo le condizioni

- 1) INTERPOLAZIONE $\neq$
- 2) CONTINUITÀ $\neq$
- 3) CONTINUITÀ $\neq$
- 4) CONTINUITÀ $\neq$

N

$N-2$

$N-2$

$N-2$

$4N-6$

$$4m-6 \neq 4m-4$$

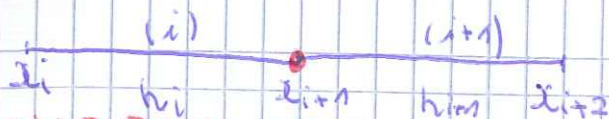
manca altre 2 condizioni

che collegheremo le spline

ANALIZZIAMO le
SPLINE NATURALI

$$\begin{cases} 5) S''(x_1) = 0 \\ 6) S''(x_m) = 0 \end{cases}$$

ORA VERIFICO LE CONDIZIONI



$h = \text{distanza tra } x_i \text{ e } x_{i+1}$

CONTINUITÀ della FUNZIONE

$$S_i(x_i) = a_i \underbrace{(x_i - x_i)^3}_h + b_i (x_i - x_i)^2 + 4(x_i - x_i) + d_i$$

$$\Rightarrow d_i = y_i$$

$$S_{i-1}(x_{i+1}) = a_i h_i^3 + b_i h_i^2 + 4h_i + y_i = y_{i+1}$$

CONTINUITÀ della DERIVATA PRIMA

$$S_i'(x_i) = 3a_i(x_i - x_i)^2 + 2b_i(x_i - x_i) + c_i$$

$$S_i'(x_{i+1}) = 3a_i h_i^2 + 2b_i h_i + c_i$$

$$S_{i+1}'(x_{i+1}) = 3a_{i+1} h_i^2 + 2b_{i+1} h_i + c_{i+1} = c_i$$

CONTINUITÀ della DERIVATA SECONDA

$$S_i''(x_i) = 6a_i(x_i - x_i) + 2b_i$$

$$S_i''(x_{i+1}) = 6a_i h_i + 2b_i$$

$$S_{i+1}''(x_{i+1}) = 6a_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}) + 2b_{i+1}$$

$$S_{i+1}'' = 6a_i h + 2b_i = 2b_{i+1}$$

Metto a sistema le 3 condizioni

$$\begin{cases} a_i h_i^3 + b_i h_i^2 + 4h_i + y_i = y_{i+1} \\ 3a_i h_i^2 + 2b_i h_i + c_i = c_{i+1} \\ 6a_i h + 2b_i = 2b_{i+1} \end{cases}$$

$$\text{chiamo } 2b_i = m_i$$

$$2b_{i+1} = m_{i+1}$$

FISSANDO b_i come soluzioni trovo

$$a_i = \frac{m_{i+1} - m_i}{6h_i}$$

ORA SOSTITUISCO NELLE PRIME

$$\frac{m_{i+1} - m_i}{6h_i} \cdot h_i^3 + \frac{m_i}{2} h_i^2 + c_i h_i + y_i = y_{i+1}$$

$$c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} = \frac{m_{i+1} - m_i}{6} h_i$$

$$\frac{(m_{i+1} - m_i + 3m_i)}{6} h_i^2 + 4h_i = y_{i+1} - y_i$$

ORA modello II'

$$3 \frac{m_{i+1} - m_i}{6h_i} R_i^2 + m_i R_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{m_{i+1} + 2m_i}{6} R_i$$

$$= \frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{m_{i+2} + 2m_{i+1}}{6} R_{i+1}$$

$$= \frac{1}{6} m_i R_i + \left(\frac{R_i + R_{i+1}}{3} \right) m_{i+1} + \frac{1}{6} m_{i+2} R_{i+1} = N_i$$

SINGOLA equazione per termini $i=2, \dots, m-1$

$$\begin{matrix} i=1 \\ i=2 \\ \vdots \\ i=N-1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{6} h_1 & \frac{R_1+R_2}{3} & \frac{1}{6} R_2 & \\ 0 & \frac{1}{6} h_2 & \frac{R_2+R_3}{3} & \frac{1}{6} R_3 \\ & & & \ddots \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ N_1 \\ \vdots \\ N_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

GLI ESTREMI NATURALI (5-6 condizione impopolare)

$$S''(x_1) = 0 \Rightarrow 2b_i = m_i$$

risolvendo la matrice CALCOLO il vettore degli

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{i+1} \end{bmatrix} =$$

Il valore di ogni m lo inserisco all'interno

$$C_i = \frac{m_{i+1} - m_i}{6h_i}$$

$$\begin{matrix} 2b_i = m_i \\ 2b_{i+1} = m_{i+1} \end{matrix}$$

$$C_i = \frac{m_{i+1} - m_i}{b_i} \quad d_i =$$

In questo modo posso per ogni intervallo i calcolarmi il polinomio che interpola i punti tra l'intervallo (x_i, x_{i+1})

$$S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$$

per ogni intervallo i sostituisco a_i, b_i, c_i, d_i