Esercitazione 5:
Sistemi a risoluzione immediata.

Ipotesi: Supponiamo le matrici non singolari.

Nota: Per verificare che si ha risolto correttamente il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ basta calcolare la norma del residuo, ovvero $||\mathbf{Ax} - \mathbf{b}||$.

Sistema diagonale

Il sistema lineare con $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{A}$ matrice diagonale della forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ha per soluzione il vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ con

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Esempio

Dato il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

si ottiene la soluzione

$$x_1 = 3/1 = 3,$$
$$x_2 = 2/2 = 1,$$
$$x_3 = 3/3 = 1.$$

Sistema triangolare superiore

Il sistema lineare con $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{A}$ matrice diagonale della forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ha per soluzione il vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ottenuto dall'algoritmo detto delle *sostituzioni all'indietro* corrispondente a

$$\begin{cases} x_n &= \frac{b_n}{a_{nn}} \\ x_i &= \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}x_k\right), \quad i = n-1, \dots, 1. \end{cases}$$

Esempio

Dato il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 18 \end{bmatrix}$$

si ottiene la soluzione

$$x_3 = 18/6 = 3\,,$$
$$x_2 = (7 - 1 \cdot x_3)/2 = (7 - 1 \cdot 3)/2 = 2\,,$$
$$x_1 = (4 - 0 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3)/1 = (4 - 0 \cdot 2 - 1 \cdot 3)/2 = 1\,.$$

cioè $\mathbf{x} = (1, 2, 3)^T$.

Sistema triangolare inferiore

Il sistema lineare con $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{A}$ matrice diagonale della forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ha per soluzione il vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ottenuto dall'algoritmo detto delle *sostituzioni in avanti* corrispondente a

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_i &= \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}x_k\right), \quad i = 2, \dots, n. \end{cases}$$

Esempio

Dato il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 14 \end{bmatrix}$$

si ottiene la soluzione

$$x_1 = 1/1 = 1\,,$$
$$x_2 = (5 - 1 \cdot x_1)/2 = (5 - 1 \cdot 1)/2 = 2\,,$$
$$x_3 = (14 - 1 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2)/3 = (14 - 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2)/3 = 3\,.$$

cioè $\mathbf{x} = (1, 2, 3)^T$.

Sistema con matrice ortogonale

In tali sistemi la matrice $\mathbf{A}$ è ortogonale, ovvero $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ pertanto la soluzione di $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è data da $\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$.

Esercizio 1

Scrivere una routine MatLab per risolvere un sistema diagonale.

La scelta dei dati del problema (matrice e vettore dei termini noti) è lasciata allo studente.

L'algoritmo risolutivo deve ricevere in ingresso la matrice diagonale $\mathbf{A}$, il vettore dei termini noti $\mathbf{b}$. In uscita, l'algoritmo deve restituire il vettore soluzione $\mathbf{x}$.

$\mathbf{x} \leftarrow \mathrm{RisolviSistemaDiagonale}\ (\ \mathbf{A},\ \mathbf{b}\ )$

% inizializzo vettore $\mathbf{x}$ a zero
$\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{0}$
% ciclo sugli elementi diagonali della matrice (stesso indice)
for $i \leftarrow 1$ **to** n
    % calcolo componente i-esima del vettore soluzione
    $x_i \leftarrow \frac{b_i}{a_{ii}}$
end

Esercizio 2

Scrivere una routine MatLab per risolvere un sistema triangolare superiore.

La scelta dei dati del problema (matrice e vettore dei termini noti) è lasciata allo studente.

L'algoritmo risolutivo deve ricevere in ingresso la matrice triangolare superiore $\mathbf{A}$, il vettore dei termini noti $\mathbf{b}$. In uscita, l'algoritmo deve restituire il vettore soluzione $\mathbf{x}$.
Possono risultare utili i comandi `size` e `length`.

$\mathbf{x} \leftarrow \mathrm{RisolviSistemaTriSup}\ (\ \mathbf{A}, \mathbf{b}\ )$

% inizializzo vettore $\mathbf{x}$ *a zero*
$\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{0}$
% calcolo soluzione dell'ultima componente di $\mathbf{x}$
$x_n \leftarrow \frac{b_n}{a_{nn}}$
% ciclo sugli indici "all'indietro"
for $i \leftarrow n-1$ **to** 1 **by step** -1
    % inizializzo variabile per somma parziale
    $\mathrm{sumval} \leftarrow 0$
    % ciclo sugli indici della sommatoria
    for $k \leftarrow i+1$ **to** n
        % sommo al valore precedente il nuovo valore
        $\mathrm{sumval} \leftarrow \mathrm{sumval} + a_{ik}x_k$
    end
    % calcolo componente i-esima del vettore soluzione
    $x_i \leftarrow \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \mathrm{sumval})$
end

Esercizio 3

Scrivere una routine MatLab per risolvere un sistema triangolare inferiore.

La scelta dei dati del problema (matrice e vettore dei termini noti) è lasciata allo studente.

L'algoritmo risolutivo deve ricevere in ingresso la matrice triangolare inferiore $\mathbf{A}$, il vettore dei termini noti $\mathbf{b}$. In uscita, l'algoritmo deve restituire il vettore soluzione $\mathbf{x}$.

$\mathbf{x} \leftarrow \text{RisolviSistemaTriInf} \ (\ \mathbf{A}, \ \mathbf{b} \ )$

% inizializzo vettore $\mathbf{x}$ *a zero*
$\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{0}$
% calcolo soluzione della priva componente di $\mathbf{x}$
$x_1 \leftarrow \frac{b_1}{a_{11}}$
% ciclo sugli indici "in avanti"
for $i \leftarrow 2$ **to** n
    % inizializzo variabile per somma parziale
    $\text{sumval} \leftarrow 0$
    % ciclo sugli indici della sommatoria
    for $k \leftarrow 1$ **to** $i - 1$
        % sommo al valore precedente il nuovo valore
        $\text{sumval} \leftarrow \text{sumval} + a_{ik} x_k$
    end
    % calcolo componente i-esima del vettore soluzione
    $x_i \leftarrow \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \text{sumval})$
end

Richiami di Teoria:Fattorizzazione/decomposizione LU.

Il metodo di eliminazione gaussiana realizza, in sostanza, la seguente fattorizzazione della matrice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$$

dove $\mathbf{P}$ è un'opportuna matrice di permutazione, che tiene conto degli eventuali scambi di righe, $\mathbf{L}$ è una matrice triangolare inferiore che contiene i moltiplicatori e con elementi sulla diagonale uguali a 1, e $\mathbf{U}$ è la matrice triangolare superiore ottenuta dall'eliminazione gaussiana.

Osservazione 0 (matrice di permutazione): Scambiare la riga i con la riga j della matrice $\mathbf{A}$ avviene mediante premoltiplicando la matrice $\mathbf{A}$ mediante la matrice $\mathbf{P}^{(i,j)}$ di elementi:

$$\mathbf{P}^{(i,j)}_{rs} = \begin{cases} 1 & \text{se } r = s = 1, \cdots, i-1, i+1, \cdots, j-1, j+1, \cdots, n, \\ 1 & \text{se } r = j, s = i \text{ o } r = i, s = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove, in pratica, una matrice di permutazione corrisponde alla matrice identità riordinata per righe. Inoltre, il prodotto di due matrici di permutazione è una matrice di permutazione. Nell'esempio seguente

$$\mathbf{PA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

la matrice di permutazione scambia la prima riga con la terza riga, la seconda rimane inalterata, la terza con la quarta riga e la quarta con la prima riga.

Osservazione 1: Dalla decomposizione LU della matrice $\mathbf{A}$ si ottine la risoluzione del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ risolvendo successivamente due sistemi triangolari (superiore e inferiore); si ha infatti:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{LUx} = \mathbf{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{Ly} = \mathbf{Pb} & \text{(triangolare inferiore)} \\ \mathbf{Ux} = \mathbf{y} & \text{(triangolare superiore)} \end{cases}$$

Osservazione 2: Una volta eseguita la fattorizzazione LU che costa $O(n^3)$ operazioni (moltiplicazioni-divisioni e addizioni-sottrazioni), risolvere il sistema comporta fare solo $O(n^2)$ operazioni in più. La fattorizzazione è conveniente per esempio (ma non solo) quando si risolvono più sistemi con la stessa matrice ma con i termini noti differenti.

Osservazione 3: Nel caso si abbia la fattorizzazione LU della matrice $\mathbf{A}$ allora è possibile calcolarne il determinante dalla formula

$$det(A) = \det(P) \cdot \det(L) \cdot \det(U) = \pm 1 \cdot \det(U) = \pm \det(U)$$

dove vale il segno + (o -) se il numero di permutazioni di righe è pari (o dispari), in quanto una permutazione di righe determina un cambio di segno.

Osservazione 4: La risoluzione di un sistema lineare triangolare inferiore della forma

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$$

avviene mediante un'algoritmo basato sulle sostituzioni in avanti.

Osservazione 5: La risoluzione di un sistema lineare triangolare superiore della forma

$$\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$$

avviene mediante un'algoritmo basato sulle sostituzione all'indietro.

Osservazione 6: Il comando MatLab che calcola la fattorizzazione LU di una matrice è LU.

Esercizio 4

Utilizzo del comando LU.

Dopo aver scritto le function che risolvono i sistemi triangolari superiori ed inferiori, risolvere i seguenti sistemi mediante la fattorizzazione LU

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dove il termine noto $\mathbf{b}$ viene scelto in modo tale che la soluzione del sistema lineare sia il vettore formato da tutti 1.

Risoluzione MatLab

In MatLab/Octave si avrebbero scritto le seguenti linee di codice:

```
[L,U,P]=lu(A)
x=U\(L\(P*b))
```

Esercizio 5

Quanto è accurata la fattorizzazione LU *di una matrice.*

Si considerino i sistemi lineari $\mathbf{A}^{(n)}\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{b}^{(n)}$ dove $\mathbf{A}^{(n)}$ è la matrice di Hilbert di ordine n e $\mathbf{b}^{(n)}$ è scelto in modo tale che la soluzione sia $\mathbf{x}^{(n)} = (1, 1, \cdots)^T$.
Calcoliamo per diversi valori di n l'errore relativo

$$E^{(n)} = ||\mathbf{x}^{(n)} - \hat{\mathbf{x}}^{(n)}||/||\mathbf{x}^{(n)}||\,,$$

dove $\hat{x}^{(n)}$ è ottenuto dalla risoluzione del sistema fattorizzato.
Riportiamo al variare di n l'errore $E^{(n)}$ e $||\mathbf{P}^{(n)} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{L}^{(n)} \cdot \mathbf{U}^{(n)}||_\infty$.
Commento ai risultati: Già per $n \geq 13$ si ha $E^{(n)} \geq 10$ che corrisponde ad avere un errore relativo sulla soluzione maggiore di 1000% a fronte di una fattorizzazione $||\mathbf{P}^{(n)} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{L}^{(n)} \cdot \mathbf{U}^{(n)}||_\infty$ praticamente esatta.

Risultati

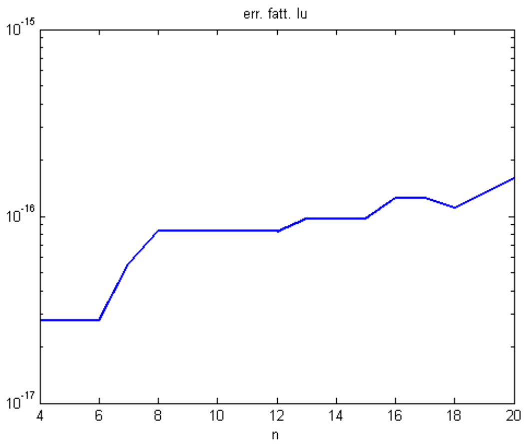

Figura 1: Errore sulla fattorizzazione LU.

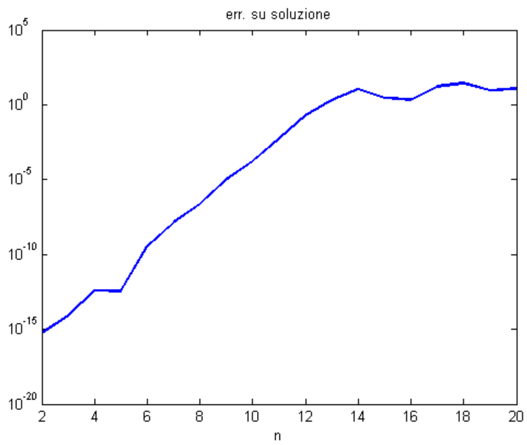

Figura 2: Errore sulla soluzione.

Richiami di Teoria: Fattorizzazione di Cholesky.

Fattorizzazione di Cholesky: Se $\mathbf{A}$ è una matrice simmetrica definita positiva allora esiste un'unica matrice $\mathbf{L}$ triangolare inferiore con elementi positivi sulla diagonale principale, tale che

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T\,.$$

Ricordando la dimostrazione per induzione, un modo per calcolare la fattorizzazione di Cholesky $\mathbf{L}$ può essere ricavato dal confronto degli elementi nell'equazione $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$ per blocchi.
Indichiamo con $\mathbf{A}_i$ il minore principale di ordine i della matrice $\mathbf{A}$ ossia $\mathbf{A}_{1\cdots i,1\cdots i}$.
(Caso $i = 1$)

$$l_{11}^2 = a_{11} \quad \Rightarrow \quad l_{11} = \sqrt{a_{11}}\,.$$

(Caso generico $i = 2, \ldots, n$) Dall'uguaglianza

$$\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{i-1} & \mathbf{h} \\ \mathbf{h}^T & a_{ii} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{i-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{r}^T & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{i-1}^T & \mathbf{r} \\ \mathbf{0} & \beta \end{pmatrix} = \mathbf{L}_i\mathbf{L}_i^T$$

e ricordando il fatto che $\mathbf{L}_{i-1}$ è nota al passo i mentre sono incogniti il vettore $\mathbf{r}$ ed il termine β, possiamo scrivere le seguenti formule induttive:

$$\mathbf{L}_{i-1}\mathbf{r} = \mathbf{h} \Rightarrow \text{sost. avanti per calcolare } \mathbf{r}$$

$$\mathbf{r}^T\mathbf{r} + \beta^2 = a_{ii} \Rightarrow \beta = \sqrt{a_{ii} - \mathbf{r}^T\mathbf{r}}\,.$$

Allora possiamo scrivere il seguente algoritmo (calcolo della fattorizzazione di Cholesky per righe).

$\mathbf{L} \leftarrow \text{choleskyR} \; (\; \mathbf{A} \;)$

% inizializzazione di $\mathbf{L}$ alle dimensioni opportune a zero
$\mathbf{L} \leftarrow \mathbf{0}$
% primo elemento della fattorizzazione
$L_{11} \leftarrow \sqrt{a_{11}}$
% ciclo sulle righe della matrice
for $i \leftarrow 2$ **to** n
    % calcolo $\mathbf{r}$
    $r \leftarrow \text{sostAvanti} \; (\mathbf{L_{1\cdots i-1, 1\cdots i-1}}, \; \mathbf{A}_{1\cdots i-1, i})$
    % calcolo β
    $\beta \leftarrow \sqrt{a_{ii} - \mathbf{r}^T\mathbf{r}}$
    % salvo i valori in $\mathbf{L}$
    $\mathbf{L}_{i,1\cdots i-1} \leftarrow \mathbf{r}$
    $\mathbf{L}_{ii} \leftarrow \beta$
end

(INIZIO PARTE FACOLTATIVA)

Mentre la fattorizzazione di Cholesky di una matrice è unica, non è vero per l'algoritmo di calcolo. Ad esempio, se calcoliamo la fattorizzazione di Cholesky $\mathbf{L}$ confrontando gli elementi dell'equazione $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$ per colonne abbiamo una altra versione dell'algoritmo. La scelta di una versione per righe o per colonne è strettamente legata al linguaggio di programmazione, cioè al modo in cui la matrice (elemento bidimensionale) è memorizzato in memoria (elemento monodimensionale), e questo può avvenire per righe o per colonne.
Ad esempio, considerando il caso di una matrice 3×3

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & (simmetrica) \\ a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} l_{11}^2 & & (simmetrica) \\ l_{21}l_{11} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & \\ l_{31}l_{11} & l_{31}l_{21} + l_{32}l_{22} & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{pmatrix}$$

si ha:

- Colonna 1, Riga 1:
$$l_{11}^2 = a_{11} \quad \Rightarrow \quad l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$
- Colonna 1, Riga 2 (noto l_{11}):
$$l_{21}l_{11} = a_{21} \quad \Rightarrow \quad l_{21} = a_{21}/l_{11}$$

- Colonna 1, Riga 3 (noto l_{11}, l_{21}):

$$l_{31}l_{11} = a_{31} \quad \Rightarrow \quad l_{31} = a_{31}/l_{11}$$

- Colonna 2, Riga 2 (noto l_{11}, l_{21}, l_{31}):

$$l_{21}^2 + l_{22}^2 = a_{22} \quad \Rightarrow \quad l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}$$

- Colonna 2, Riga 3 (noto $l_{11}, l_{21}, l_{31}, l_{22}$):

$$l_{31}l_{21} + l_{32}l_{22} = a_{32} \quad \Rightarrow \quad l_{32} = (a_{32} - l_{31}l_{21})/l_{22}$$

- Colonna 3, Riga 3 noto $l_{11}, l_{21}, l_{31}, l_{22}, l_{32}$):

$$l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = a_{33} \quad \Rightarrow \quad l_{33} = \sqrt{a_{33} - (l_{31}^2 + l_{32}^2)}\,.$$

Generalizzando le formule precedenti abbiamo:

(prima colonna)

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$l_{i1} = a_{i1}/l_{11} \quad \text{per } i = 2, \ldots, n$$

(generica colonna)

$$l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk}\right), \qquad \text{per } i > j$$

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}.$$

Quindi possiamo scrivere il seguente algoritmo:

```
L ← cholesky ( A )
% inizializzazione di L alle dimensioni opportune a zero
L ← 0
% primo elemento della fattorizzazione
L_11 ← sqrt(a_11)
% ciclo sulle righe della matrice
for i ← 2 to n
    % ciclo sulle colonne della matrice fino alla diagonale
    for j ← 1 to i
        % inizializzo valore della sommatoria a zero
        sumval ← 0
        % calcolo la sommatoria distinguendo se si tratta
        % dell'elemento diagonale oppure no
        if i ≠ j
            for k ← 1 to j − 1
                sumval ← sumval + l_ik l_jk
            end
            l_ij ← (a_ij − sumval)/l_jj
        else
            for k ← 1 to i − 1
                sumval ← sumval + l_ik^2
            end
            l_ii ← sqrt((a_ii − sumval))
        end
    end
end
```

(FINE PARTE FACOLTATIVA)

Una volta nota la fattorizzazione di Cholesky della matrice $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$ il sistema lineare $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ si risolve come:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{L}(\mathbf{L}^T\mathbf{x}) = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b} & \Rightarrow \text{ sost. avanti} \\ \mathbf{L}^T\mathbf{x} = \mathbf{y} & \Rightarrow \text{ sost. indietro} \end{cases}$$

Esercizio 6

Scrivere una routine MatLab che calcoli la fattorizzazione di Cholesky di una matrice simmetrica e definita positiva.
Il comando MatLab che esegue la fattorizzazione di Cholesky è `chol`. Questo comando restituisce una matrice triangolare superiore $\mathbf{R}$ tale che $\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{A}$.

L'algoritmo riceve in ingresso la matrice $\mathbf{A}$ e restituisce in uscita la matrice $\mathbf{L}$ triangolare inferiore.

Provare la routine sul seguente esempio

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 13 & 23 \\ 4 & 23 & 77 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$$

Esercizio 7 (Risoluzione di sistemi lineari sparsi)[1]

Un modo sistematico per risolvere le reti elettriche con presenza di soli elementi resistori può essere ottenuto utilizzando la *sparse tableau analisys* che consiste nella scrittura esplicita di tutte le equazioni che descrivono il circuito nelle variabili:

- v delle cadute di tensione dei diversi componenti;
- i delle correnti che attraversono i singoli componeti;
- e delle potenziali ai nodi (fissando il potenziale del nodo di riferimento a zero).

In una rete elettrica composta da l elementi e n nodi ci sono $2l+n-1$ variabili soluzione, cioè l tensioni di lato, l correnti di lato e $n-1$ potenziali ai nodi (il potenziale del nodo di riferimento è assunto a 0).
Le equazioni che si dovranno scrivere saranno pertanto:

- l equazioni caratteristiche degli elementi del circuito;
- $n-1$ equazioni (indipendenti) di conservazione delle correnti ai nodi (Legge di Kirchhoff delle correnti);
- l equazioni che legano le cadute di tensione degli elementi con i potenziali ai nodi.

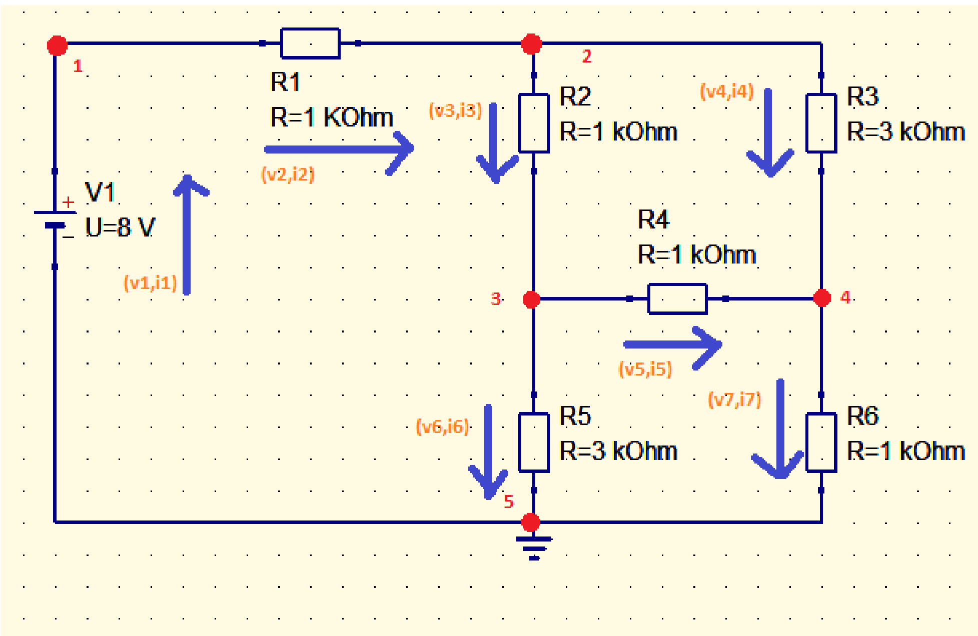

Figura 3: Esempio di circuito elettrico.

[1] Facoltativo.

Nel scrivere le leggi caratteristiche degli elementi si è utilizza la convenzione degli utilizzattore per tutti gli elementi (attivi o passivi) cioè la caduta di tensione è positiva nel verso concorde della corrente ($v_+ \longrightarrow v_-$).
Ad esempio, considerando il circuito riportato nella Figura 3 possiamo abbiamo:

- v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7 cadute di tensione tra i 7 elementi che costituiscono la rete fisica;
- i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, i_7 correnti che attraverso i 7 elementi che costituiscono la rete fisica;
- e_1, e_2, e_3, e_4 potenziali ai nodi (potenziale del nodo 5 è assunto a zero);

per un totale di 18 variabili soluzione.
Le equazioni che costituiscono la rete fisica sono:

- 7 *leggi caratteristiche* sugli elementi:

$$\begin{cases} -v_1 = V1 & \text{(generatore di tensione, conv. utilizzatori)} \\ v_2 - R_1 \cdot i_2 = 0 & \text{(resistore R1)} \\ v_3 - R_2 \cdot i_3 = 0 & \text{(resistore R2)} \\ v_4 - R_3 \cdot i_4 = 0 & \text{(resistore R3)} \\ v_5 - R_4 \cdot i_5 = 0 & \text{(resistore R4)} \\ v_6 - R_5 \cdot i_6 = 0 & \text{(resistore R5)} \\ v_7 - R_6 \cdot i_7 = 0 & \text{(resistore R6)} \end{cases}$$

- 4 leggi di Kirchhoff ai nodi (tranne il nodo di riferimento) dove abbiamo preso la corrente entrante su un nodo con il segno "-" mentre quella uscente con il segno

$$\begin{cases} -i_1 + i_2 = 0 & \text{(nodo 1)} \\ -i_2 + i_3 + i_4 = 0 & \text{(nodo 2)} \\ -i_3 + i_5 + i_6 = 0 & \text{(nodo 3)} \\ -i_4 - i_5 + i_7 = 0 & \text{(nodo 4)} \end{cases}$$

- 7 leggi che legano i potenziali ai nodi alle cadute di tensioni sui compontenti:

$$\begin{cases} v_1 + e_1 = 0 & \text{(generatore di tensione)} \\ v_2 - e_1 + e_2 = 0 & \text{(resistore R1)} \\ v_3 - e_2 + e_3 = 0 & \text{(resistore R2)} \\ v_4 - e_2 + e_4 = 0 & \text{(resistore R3)} \\ v_5 - e_3 + e_4 = 0 & \text{(resistore R4)} \\ v_6 - e_3 = 0 & \text{(resistore R5)} \\ v_7 - e_4 = 0 & \text{(resistore R6)} \end{cases}$$

Scritto in forma matriciale abbiamo il seguente sistema lineare (sparso) da risolvere:

$$
\left[\begin{array}{ccccccc|ccccccc|cccc}
-1 & +1 & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & -1 & +1 & +1 & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & -1 & & +1 & +1 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & -1 & -1 & & +1 & & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & 1 & & & & & & & 1 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & & & & & -1 & 1 & & \\
 & & & & & & & & & 1 & & & & & & -1 & 1 & \\
 & & & & & & & & & & 1 & & & & & -1 & & 1 \\
 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & -1 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & -1 & \\
 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & & -1 \\
\hline
 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\
-R1 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
 & -R2 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & -R3 & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & -R4 & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & -R5 & & & & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & & -R6 & & & & & & & & 1 & & & &
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ \hline v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ \hline e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline V1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{array}\right]
$$

che risulta essere della forma

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 1_l & -A^T \\ N & M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_s \end{bmatrix}$$

dove A è la matrice di incidenza del grafo.
Scrivere il sitema lineare sparso dell'esempio riportato in figura e risolverlo numericamente.

Risultati

La soluzione del sistema è

```
Correnti

i =
    0.0030
    0.0030
    0.0020
    0.0010
    0.0010
    0.0010
    0.0020

Cadute di tensione

v =
    -8
     3
     2
     3
     1
     3
     2

Potenziali

e =
     8
     5
     3
     2
```