Esercitazione 2

Definizione e proprità delle funzioni base delle B-Spline

Prendiamo $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ una sequenza non decrescente di numeri reali ($x_i \leq x_{i+1}$). Gli x_i sono chiamati nodi "knots", e X è il vettore dei nodi. Definiamo la i-esima funzione base di ordine k, indicata con $B_{i,k}$, come

$$B_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$B_{i,k}(t) = \frac{t - x_i}{x_{i+k-1} - x_i} B_{i,k-1}(t) + \frac{x_{i+k} - x}{x_{i+k} - x_{i+1}} B_{i+1,k-1}(t)$$

Questa formula è nota come formuala di Cox–DeBoor.

Osserviamo che:

- $B_{i,1}(t)$ è una funzione a tratti costante uguale a zero ovunque tranne nell'intervallo $[x_i, x_{i+1})$;
- per ogni k, $B_{i,k}(t)$ è una combinazione lineare di due funzioni di base di ordine $k - 1$;

- il calcolo della funzione di ordine k genera una tabella del tipo

$$
\begin{array}{ccccccc}
B_{1,1} & & & & & & \\
 & \searrow & & & & & \\
 & & B_{1,2} & & & & \\
 & \nearrow & & \searrow & & & \\
B_{2,1} & & & & B_{1,3} & & \\
 & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & B_{2,2} & & & & B_{1,4} \\
 & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
B_{3,1} & & & & B_{2,3} & & \\
 & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & B_{3,1} & & & & B_{2,4} \\
 & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
B_{4,1} & & & & B_{3,3} & & \vdots \\
 & \searrow & & \nearrow & & & \\
 & & B_{4,2} & & \vdots & & \\
 & \nearrow & & & & & \\
B_{5,1} & & \vdots & & & & \\
 & & & & & & \\
\vdots & & & & & &
\end{array}
$$

- se nel calcolo delle funzioni di base si determina un quoziente del tipo $0/0$ questo viene definito uguale a zero;

Elenchiamo alcune proprietà delle funzioni base delle B-Spline:

- Proprietà di supporto locale, $B_{i,k}(t) = 0$ se $t \notin [x_i, x_{i+k})$;
- In ogni sotto-intervallo $[x_j, x_{j+1})$ al massimo k delle $B_{i,k}(t)$ possono essere diverse da zero, nominalemente $B_{j-k}(u), \ldots, B_{j,k}(t)$;
- $B_{i,k}(t) \geq 0$ per ogni i, k e x (non-negativa);
- per ogni sotto-intervallo $[x_i, x_{i+1})$, la somma di tutte le funzioni non nulle in quel intervallo è uguale a 1 per qualunque t (parizione dell'unità).

La codifica della routine MatLab che implementa il calcolo delle funzioni base B-Spline è la seguente (versione ricorsiva per semplicità)

```
function value = BSplineEval(i,k,X,t)
% INPUT
% i indice della B-Spline (o intervallo) da 1 a length(X)-k
% k ordine della B-Spline
% X vettore dei nodi
% t parametro in cui viene valutata la B-Spline
%
% OUTPUT
% value rappresenta il valore della B-Spline in t


% Caso speciale (t==X(end))
if t == X(end)
    if i == length(X) - k
        value = 1;
        return;
    else
        value = 0;
        return;
    end
end

if k == 1,
    if X(i) <= t && t < X(i+1)
        value = 1;
    else
        value = 0;
    end
else
    if X(i+k-1) == X(i) && X(i+k) == X(i+1)
        value = 0;
    elseif X(i+k) == X(i+1)
        value = (t-X(i))/(X(i+k-1)-X(i)) * BSplineEval(i,k-1,X,t);
    elseif X(i+k-1) == X(i)
        value = (X(i+k)-t)/(X(i+k)-X(i+1)) * BSplineEval(i+1,k-1,X,t);
    else
        value = (t-X(i))/(X(i+k-1)-X(i)) * BSplineEval(i,k-1,X,t) + ...
            (X(i+k)-t)/(X(i+k)-X(i+1)) * BSplineEval(i+1,k-1,X,t);
    end
end
```

Esercizio 1

Mostrare come si comporta la B-spline relative al seguente vettore dei "knots":

$$X = \{0\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,1/4\,,\,1/2\,,\,3/4\,,\,1\,,\,1\,,\,1\,,\,1\}\,.$$

per $k = 4$.

Risultati

```
%Suggerimento per la soluzione:
close all
clear all
clc

uvalue = linspace(0,1,101);
k =


X =
kmax =

Nip = zeros(length(uvalue),kmax);
for kind=1:kmax,
    for tind=1:length(uvalue),
        t = uvalue(tind);
        Nip(tind,kind) =
    end
end

figure(1);
h = plot(uvalue,Nip);
set(h,'LineWidth',2);
set(gca,'XTick',linspace(0,1,5));
```

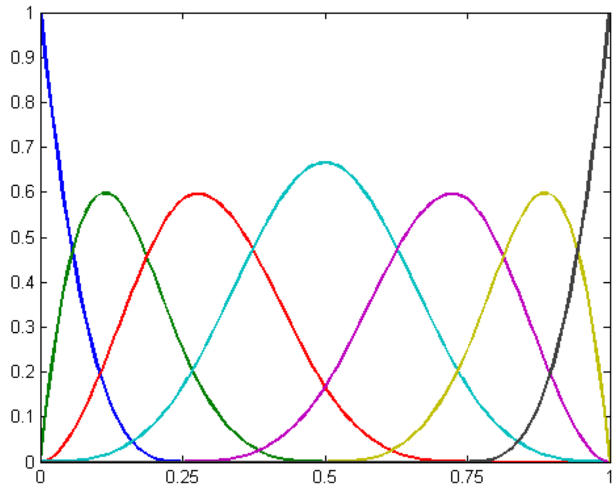

Figura 1: Funzioni base per le B-Spline relative all'esercizio 1.

Esercizio 2

Mostrare come si comporta la B-spline relative al seguente vettore dei “knots”:

$$X = (0\,,\,1/4\,,\,1/4\,,\,1/2\,,\,3/4\,,\,1\,,\,1\,,\,1)$$

per $k = 3$.

Risultati

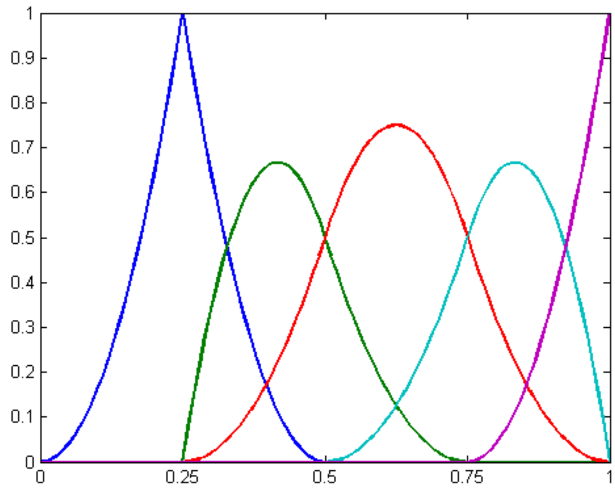

Figura 2: Funzioni base per le B-Spline relative all'esercizio 2.

Esercizio 3

Mostrare come si comporta la B-spline relative ai seguenti vettori dei "knots":

$$X = (0, 1)$$

$$X = (0, 0, 1, 1)$$

$$X = (0, 0, 0, 1, 1, 1)$$

$$X = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$$

$$X = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1)$$

$$X = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

$$X = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

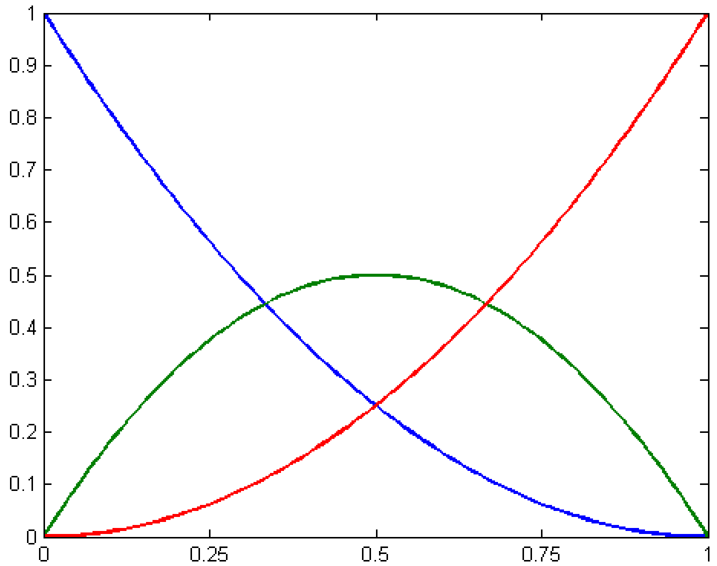

Figura 3: B-Spline di ordine 3.

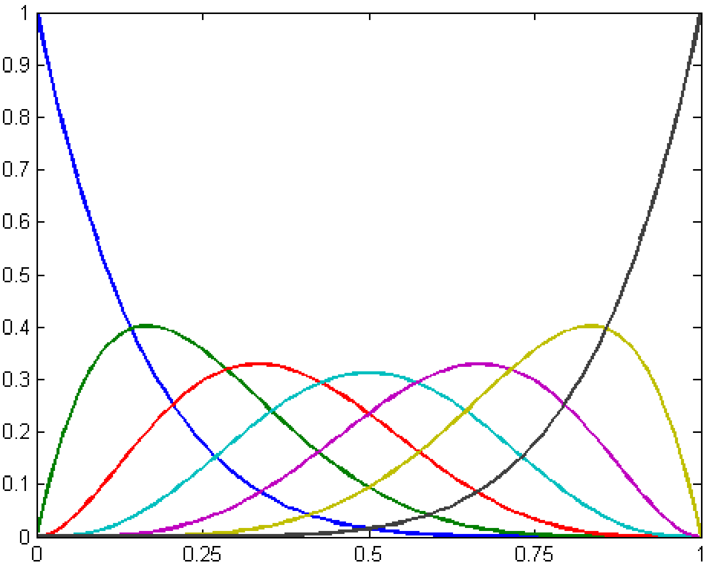

Figura 4: B-Spline di ordine 7.

Esercizio 4

Confrontare le B-Spline di ordine k con pesi (valori da interpolare) dati da $(1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$ e l'interpolazione polinomiale (utilizzando il comando `polyfit`).

Risultati

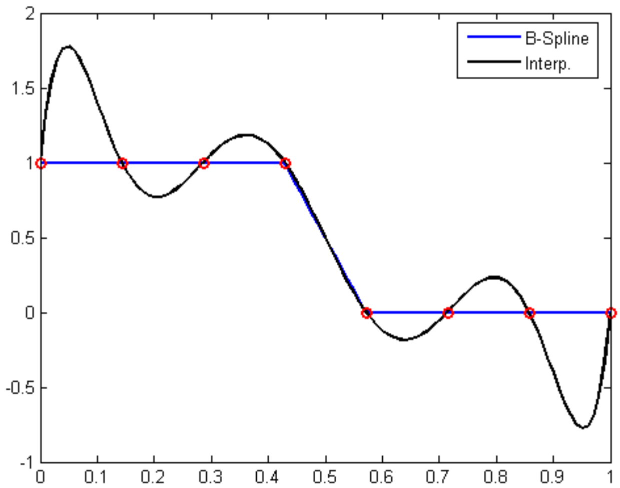

Figura 5: Esempio cfr. interpolazioni con $k = 2$.

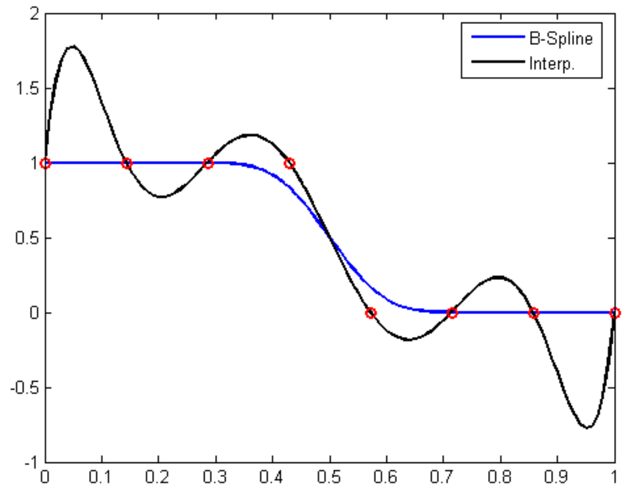

Figura 6: Esempio cfr. interpolazioni con $k = 4$.

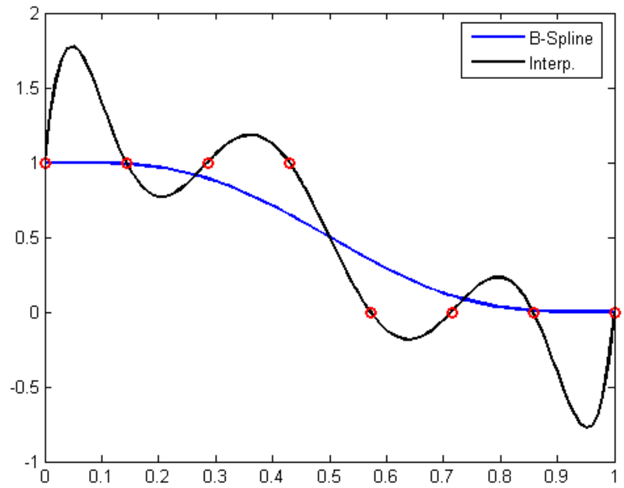

Figura 7: Esempio cfr. interpolazioni con $k = 8$.

Esercizio 5

Sia N la dimensione dello spazio per l'intervallo $[x_0, x_n]$. Si può interpolare da $s(t) = \sum_{j=1}^{N} a_j B_{j,k}(t)$ a siti $\tau_1 < \tau_2 < ... <_N$ se e solo se $\tau_j \in (nodo_j, nodo_{j+k})$ (nodi estesi ordinati da 1 a $N+k-1$) (questo è il teorema di Schoenberg-Whitney). Allora si crei la matrice $A = [B_{j,k}(\tau_i)] \in R^{N \times N}$ e si risolva il sistema $Aa = y$.

Guida alla soluzione:

1. Come esempio si consideri il vettore dei nodi definito
   - come nell'esercizio precedente;
   - come le spline not-a-knot: per nodi originali $x_0 < x_1 < ...x_n$, si usi le B-spline con nodi $x_0, x_2, ...x_{n-2}, x_n$, cioè, con x_1 e x_{n-1} eliminati (perchè non sono più nodi) e poi $x_0, x_1, x_2, ...x_{n-1}, x_n$ per i siti, cioè x_1 e x_{n-1} non sono nodi ma sono siti.
2. Si scelga i vettore dei siti X (si faccia attenzione al caso delle not-a-knot);
3. Si scelga i vettore dei siti τ;
4. Si costruisca la matrice $B_{j,k}(\tau_i)$;
5. Si risolva il sistema lineare.
6. Si riportano i risultati ottenuti a video.

Variazione:

Provare una suddivisione con punti ripetuti.

Risultati

Nel caso di nodi distribuiti come nell'esercizio precedente la matrice di $B_{j,k}(\tau_i)$ risulta:

1.0000	0	0	0	0	0	0	0
0.3399	0.3966	0.1983	0.0551	0.0092	0.0009	0.0001	0.0000
0.0949	0.2656	0.3187	0.2125	0.0850	0.0204	0.0027	0.0002
0.0199	0.1044	0.2350	0.2938	0.2203	0.0991	0.0248	0.0027
0.0027	0.0248	0.0991	0.2203	0.2938	0.2350	0.1044	0.0199
0.0002	0.0027	0.0204	0.0850	0.2125	0.3187	0.2656	0.0949
0.0000	0.0001	0.0009	0.0092	0.0551	0.1983	0.3966	0.3399
0	0	0	0	0	0	0	1.0000

e si ottiene la seguente interpolante (coincidente con l'interpolante polinomiale)
Per le B-Spline costruite come le not-a-knot abbiamo:
Risultato che coincide con il comando `spline`.

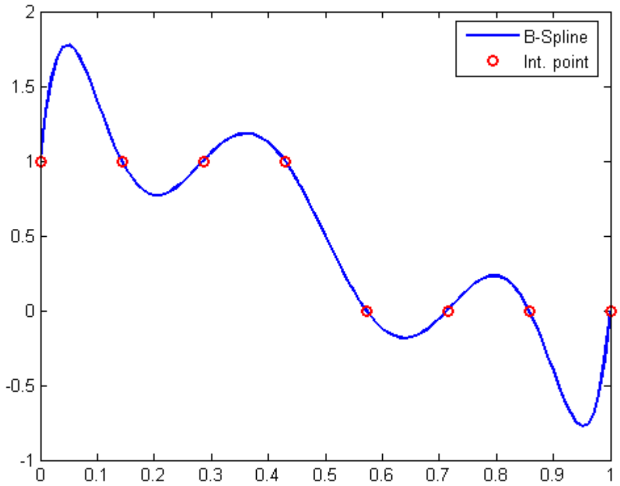

Figura 8: Esercizio 5

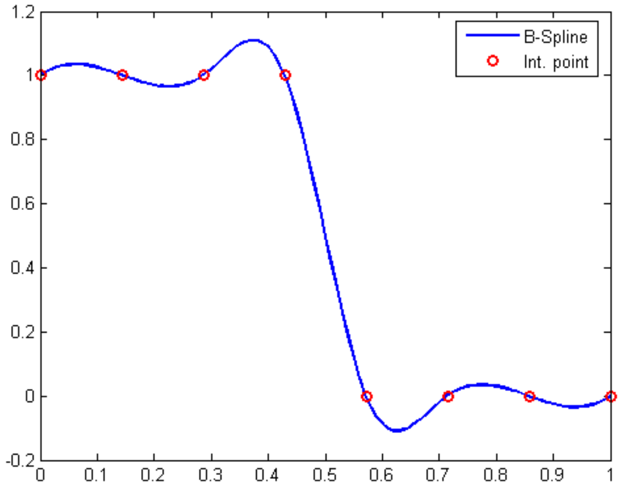

Figura 9: Esercizio 5