Esercitazione 4

Richiami di Teoria

B-spline
Le curve costituite da un unico polinomio sono spesso poco adeguate per descrivere forme geometriche complesse. I principali inconvenienti sono i seguenti:

- per soddisfare un gran numero di vincoli è necessario avere un grado molto elevato, dato che per interpolare n punti dobbiamo utilizzare una curva polinomiale di Bézier di grado $n-1$. Curve di grado elevato sono però difficili da manipolare e numericamente instabili a causa della proliferazione degli errori di troncamento.

- descrivere una curva con un unico segmento di Bézier non è pratico poiché, anche se è possibile modificare la forma della curva spostando i punti di controllo, lo spostamento interessa comunque tutta la curva.

La soluzione per ovviare a questi inconvenienti è quello di utilizzare curve polinomiali a tratti, cioè della forma

$$C(u) = \sum_{i=0}^{n} f_i(u) P_i$$

dove i P_i sono i punti di controllo, e i $f_i(u)$ sono funzioni polinomiali a tratti cioè non nulle solo su una porzione limitata dell'intervallo di variazione del parametro u e nulle in tutto il resto dell'intervallo. Questa proprietà di "supporto locale" rappresenta la proprietà che una modifica ad un punto di controllo modifica la curva solo in un intorno del punto di controllo stesso e non dell'intera curva.

La Figura **??** riporta una curva B-Spline di grado 3 definita da 9 punti di controllo. Infatti, ci sono cinque segmenti di una curva di Bézier di grado 3 uniti per formare la curva di B-Spline definita dai punti di controllo. Questi punti suddividono la curva B-Spline in segmenti di una curv a di Bézier.

Dato che suddividere la curva direttamente è difficile, conviene suddividere il dominio della curva. Così il dominio della curva $[0, 1]$, può essere suddiviso da punti chiamati "knots".

Noi utilizzero le B-Spline.

Una curva B-Spline di grado p è definita come

$$C(u) = \sum_{i=0}^{n} B_i^p(u) P_i$$

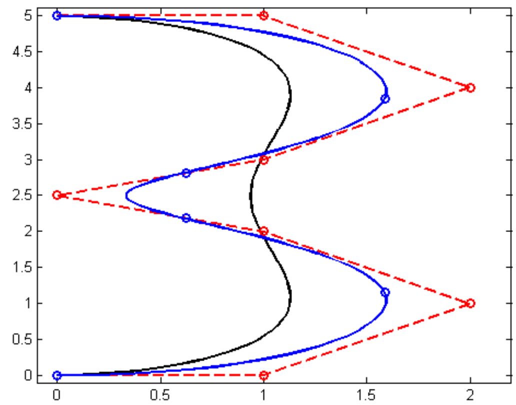

Figura 1: Poligono di controllo (rosso), curva di Bézier (nero), B-Spline di ordine 3 (blu) con relativa suddivisione dovuta ad un vettore dei knots equispaziato.

dove P_i sono gli $n+1$ punti di controllo e $B_i^p(u)$ sono le funzioni base B-Spline definite su un vettore dei nodi X della forma $X = \{\underbrace{0,\ldots,0}_{p+1}, x_{p+1},\ldots,x_{m-p-1},\underbrace{1,\ldots,1}_{p+1}\}$.

La procedura di calcolo di un punto sulla curva ad un dato t consiste in 3 passi:

1. trovare a quale sotto–intervallo appartiene t;
2. calcolare le funzioni di base diverse da zero;
3. moltiplicare il valore delle funzioni base non nulle per i corrispondenti punti di controllo.

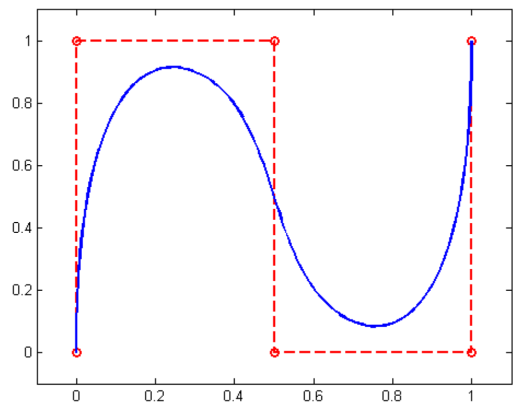

Figura 2: Esempio di B-Spline di grado 3.

Proprietà delle curve B-Spline

Nella Figura 3 riportiamo il poligono di controllo utilizzato per mostrare alcune proprietà delle B-Spline.

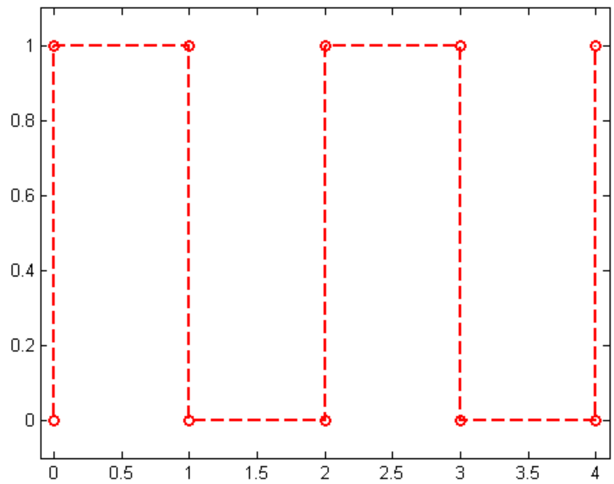

Figura 3: Poligono di controllo.

1. Interpolazione agli estremi se il vettore X è della forma

$$X = \{\underbrace{0, \ldots, 0}_{p+1}, x_{p+1}, \ldots, x_{m-p-1}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{p+1}\}.$$

2. Invarianza per trasfromazioni affini. Nella Figura 4 viene mostrato un esempio di invarianza per rotazione ($p = 3$).

3. Modifica locale: muovendo il punto di controllo P_i cambia la curva solo nell'intervallo $[x_i, x_{i+p-1})$. Nella Figura 5 viene mostrato un esempio in cui il terzo punto viene spostato ($p = 2$).

4. Al crescere del grado p tende alla curva di Bézier. Nella Figura 6 viene mostrato un esempio in cui il p varia da 1 (poligono di controllo) a $5 = 6 - 1$ (curva di Bézier con 6 punti di controllo).

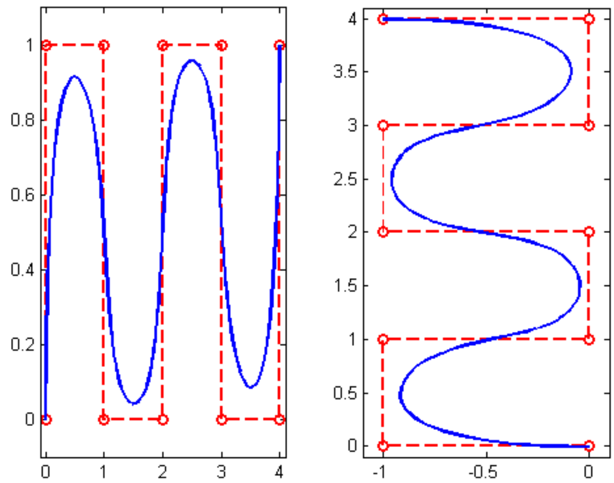

Figura 4: Esempio di rotazione.

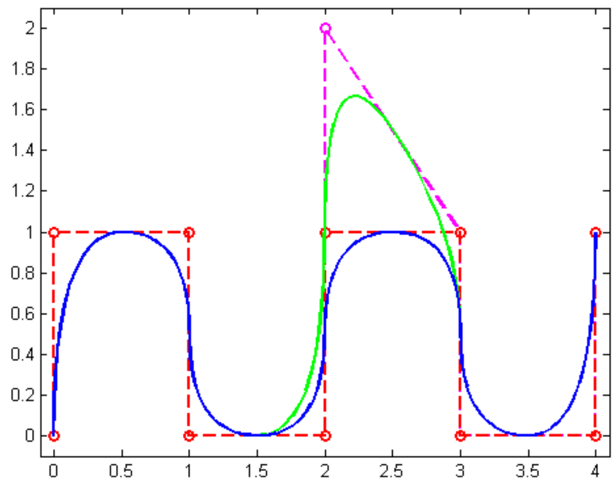

Figura 5: Esempio di modifica locale.

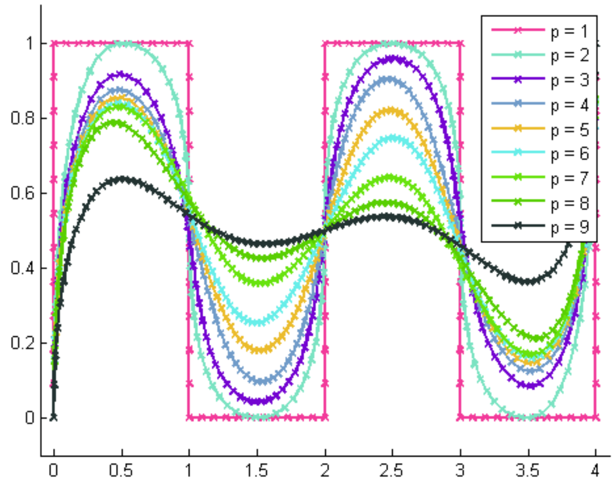

Figura 6: Esempio di aumento del grado.

Esercizio 1

Mostrare le diverse proprietà delle B-Spline con un esempio a piacere.

Richiami di Teoria: Knot insertion

Il significato dell'operazione di knot insertion è aggiungere un nodo all'interno di un vettore dei nodi esistente senza cambiare la forma geometrica della B-Spline. Si tratta, cioè, di un cambiamento della base dello spazio vettoriale in cui è definita la curva.

Sia dato un insieme di n punti di controllo $P_1, \ldots, P_n$, un vettore dei nodi con l elementi $X = \{x_1, \ldots, x_l\}$ e un ordine m. Si supponga che il nodo da inserire $\hat{x}$ appartenga all'intervallo $[x_k, x_{k+1})$. In questo caso la nuova partizione nodale $\hat{X} = \{\hat{x}\}_{i=1,\ldots,l+1}$ è costruita nel modo seguente:

$$\hat{u}_i = u_i \text{ per } i \leq k$$

$$\hat{u}_i = \hat{u} \text{ per } i = k+1$$

$$\hat{u}_i = u_{i-1} \text{ per } i \geq k+2$$

Allora si ha: Sia X la partizione orginale e sia $\hat{X}$ la partizione estesa in cui è stato incluso il nuovo nodo, allora vale la seguente relazione:

$$B_{i,m}(t) = \hat{B}_{i,m}(t) \text{ per } i \leq k-m$$

$$B_{i,m}(t) = \frac{t-\hat{x}_i}{\hat{x}_{i+m}-\hat{x}_i}\hat{B}_{i,m}(t) + \frac{\hat{x}_{i+m+1}-t}{\hat{x}_{i+m+1}-\hat{x}_{i+1}}\hat{B}_{i,m}(t) \text{ per } k-m+1 \leq i \leq k$$

$$B_{i,m}(t) = \hat{B}_{i,m}(t) \text{ per } i \geq k+1$$

I nuovi coefficienti delle basi, ovvero quello che dterminano la nuova curva della forma $s(t) = \sum c_i B_{i,m}(t)$, possono essere determinati come segue:

$$\hat{c}_i = c_i \text{ per } i \leq k-m+1$$

$$\hat{c}_i = \lambda_i c_i + (1-\lambda_i)c_{i-1} \text{ per } k-m+2 \leq i \leq k$$

$$\hat{c}_i = c_{i-1} \text{ per } i \geq k+1\,.$$

Esercizio 2

Mostrare la proprietà di knot insertion su un esempio a piacere.

```
function [Xn,Pxn,Pyn] = knot_insertion(t,X,m,Px,Py)
% Funzione per l'inserimento di nodi

% Individua l'indice dell'intervallo in cui si trova t
k = ricercaindice(X,t);

% determina la molteplicita'
```

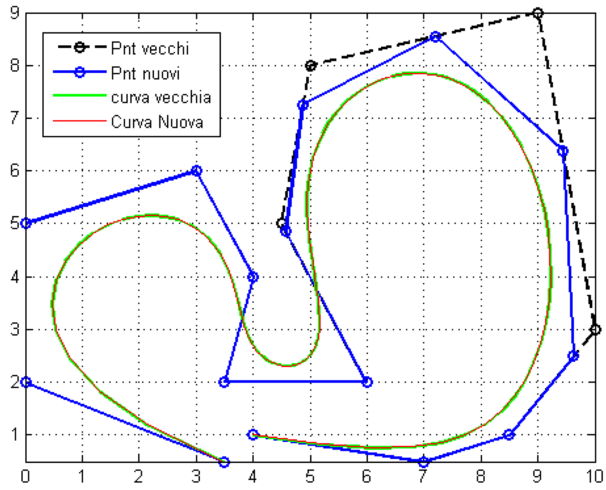

Figura 7: Esempio di inserimento di un nodo $t = 0.75$ e $p = 5$.

```
s = length(find(X==t));

% dimensiona i vettori
Xn = zeros(1,length(X)+1);
Pxn = zeros(1,length(Px)+1);
Pyn = zeros(1,length(Py)+1);

% copia i primi elementi che sono gli stessi
Pxn(1:k-m+1) = ???;
Pyn(1:k-m+1) = ???;

% determina e inserisci i nuovi punti di controllo
for i=k-m+2:k-s
    ???
    Pxn(i) = ???;
    Pyn(i) = ???;
end

% inserisci i restanti punti di controllo
Pxn(k-s+1:end) = ???;
Pyn(k-s+1:end) = ???;

% Aggiorna vettore dei nodi
Xn(1:k) = ???;
Xn(k+1) = ???;
Xn(k+2:end) = ???;
```

```
function index = ricercaindice(X,t)

% t deve essere compreso nell'intervallo determinato dal vettore dei nodi
if t<X(1) || t>X(end)
    error('Indice esterno intervallo');
end

% inizializza con l'indice del primo e ultimo elemento del vettore
p=1;
n = length(X);

% determina l'indice dell'intervallo in cui si trova t
while p<n
    m = floor((p+n)/2);
    if X(m)≤t && X(m+1)>t
        n=m;
        break;
    elseif t<X(m)
        n = m−1;
    elseif t≥X(m+1)
        p = m+1;
    end
end
index = n;
```