Esercitazione 7

Radial basis function (RBF)

La tecnica delle RBF consiste nel scrivere l'interpolante come combinazione lineare di n funzioni di base che dipendono dalla distanza $||x - x_i||$ cioè:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi(||x - x_i||) \, .$$

Utilizzando la condizione di interpolazione $y(x_i) = y_i$ si ottiene il sistema lineare

$$[\Phi][a] = [y]$$

dove le componenti della matrice di interpolazione sono $\phi_{ji} = \phi(x_j - x_i)$.

Alcune funzioni di base notevoli sono:

- Gaussiana;
- Multiquadratica inversa;
- Multiquadratica;
- di Wendland
$$\phi(r) = (\epsilon - r)_+^4 (4r + 1) \text{ con } \epsilon > 0.$$

Dal momento che le RBF non interpolano esattamente le funzioni lineari, bisogna introdurre adottare la seguente precauzione per calcolare l'interpolante attraverso la tecnica dei "proiettori booleani":

- togliere un offset ai punti di interpolazione dato dalla retta o piano che meglio approssima tali punti; con questa accortezza se si ha una funzione costante, l'offset è la costante stessa e quindi si cerca l'interpolante della funzione nulla che è la funzione nulla;
- tale offset va aggiunto alla fine dopo aver calcolato i punti interpolati con le RBF.

Gaussiana

$$\phi(r) = \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma}\right)$$

```
function y = rbf_gauss(r,sigma)
% Funzione di base radiale di tipo gaussiano
y = exp(-r.^2)./(2*sigma);
```

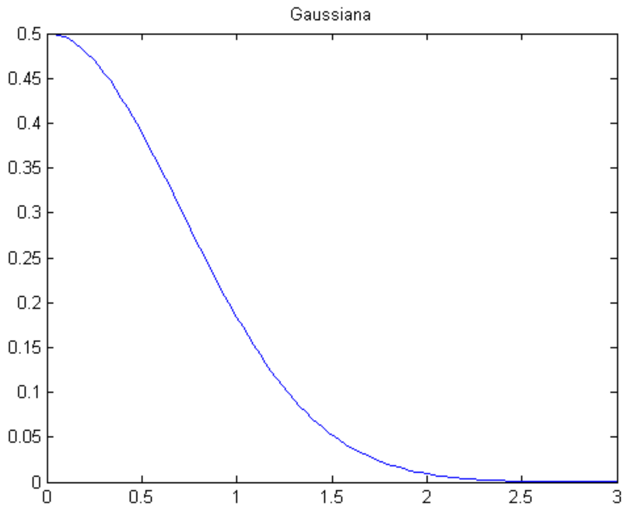


Figura 1: Esempio di funzione base gaussiana.

Multiquadratica inversa

$$\phi(r) = \left(\frac{1}{\epsilon^2 + r^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

```
function y = rbf_mqinv(r,epsilon)
% Funzione di base radiale di tipo multiquadratica inversa
y = sqrt(1./(epsilon.^2+r.^2));
```

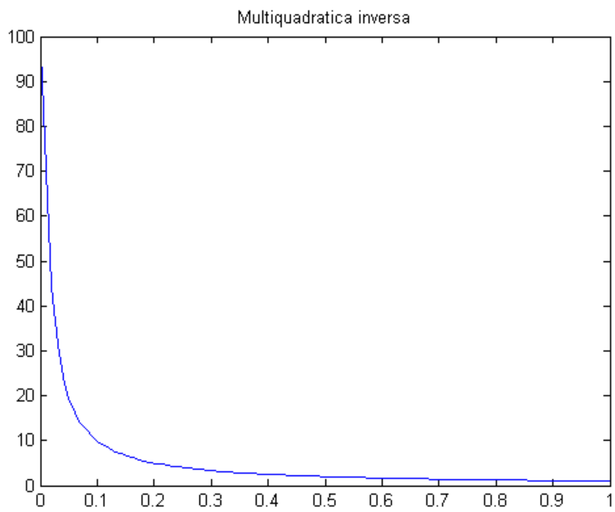


Figura 2: Esempio di funzione base multiquadratica inversa.

Multiquadratica

$$\phi(r) = \left(\epsilon^2 + r^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

```
function y = rbf_mq(r,epsilon)
% Funzione di base radiale di tipo multiquadratica
y = sqrt(epsilon.^2+r.^2);
```

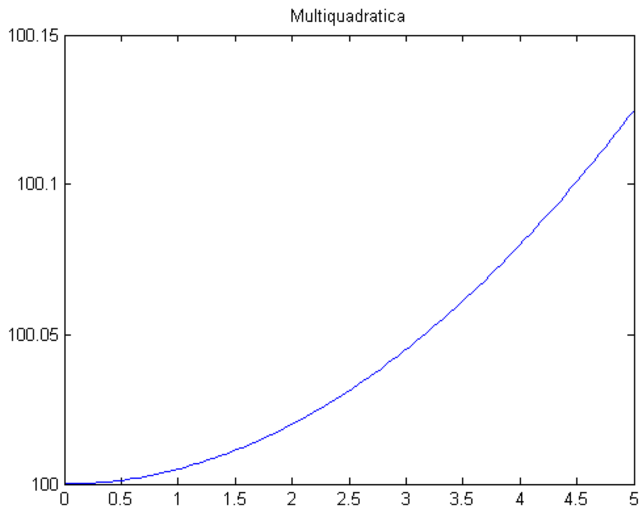


Figura 3: Esempio di funzione base multiquadratica.

Esercizio 1

Disegnare la stessa funzione di base per diversi valori del parametro di ϵ o σ.

Esercizio 2

Creare (e visualizzare) la seguente funzione di base

$$\phi(r) = r^2 \log(r) \, .$$

Si faccia attenzione al caso $r = 0$.

La seguente function MatLab implementa l'interpolazione senza la tecnica della "somma booleana" per il trattamento delle funzioni lineari.

```
function y = rbf_eval_nostab(P,Fval,Pnt,rbf_func,varargin)
% Valutazione di una rbf senza il trattamento dell'offset

% Dimensione del problema pari alle colonne di P
n = size(P,1);
dim = size(P,2);

% Inizializzazione della matrice K
K = zeros(n);

% Ciclo sulle righe
for i = 1:n,
    % Ciclo sulle colonne
    for j = 1:n
        % Calcolo il valore di r_ij
        r = norm(P(i,:)-P(j,:));

        % Assegno il valore
        rbf_val = feval(rbf_func,r,varargin{:});
        K(i,j) = rbf_val;
    end
end

% Termine F
F = Fval;

% Risoluzione del sistema lineare
acoeff = K\F;
```

```
% Valutazione dell'interpolante
% -----------------------------


% Inizializzazione di y alla dimensione di Pnt
np = size(Pnt,1);
y = zeros(np,1);

% Ciclo su tutti i punti da valutare
for k=1:np
    % valutazoine di tutti i punti della rbf
    fval = zeros(length(acoeff),1);
    for i=1:length(acoeff)
        % valuto distanze rispetto al punto in considerazione
        r = norm(P(i,:)-Pnt(k,:));
        % valutazione della rbf
        rbf_val = feval(rbf_func,r,varargin{:});
        fval(i) = rbf_val;
    end

    % valutazione dell'interpolante nel punto
    y(k) = fval'*acoeff;
end
```

La seguente function MatLab implementa l'interpolazione con la tecnica della "somma booleana" per il trattamento delle funzioni lineari.

```
function y = rbf_eval_stab(P,Fval,Pnt,rbf_func,varargin)
% Valutazione di una rbf con il trattamento dell'offset

% Dimensione del problema pari alle colonne di P
n = size(P,1);
dim = size(P,2);

% Inizializzazione della matrice K
K = zeros(n);

% Calcolo dell'offset
offset = [ones(n,1),P]\Fval;
if dim==1
    % Problema monodimensionale
    offsetP = offset(1) + offset(2)*P;
end
if dim==2
    % Problema monodimensionale
```

```
    offsetP = offset(1) + offset(2)*P(:,1) + offset(3)*P(:,2);
end


% Nuovi punti senza offset
Fval = Fval - offsetP;

% Ciclo sulle righe
for i = 1:n,
    % Ciclo sulle colonne
    for j = 1:n
        % Calcolo il valore di r_ij
        r = norm(P(i,:)-P(j,:));

        % Assegno il valore
        rbf_val = feval(rbf_func,r,varargin{:});
        K(i,j) = rbf_val;
    end
end

% Termine F
F = Fval;

% Risoluzione del sistema lineare
acoeff = K\F;


% Valutazione dell'interpolante
% ------------------------------


% Inizializzazione di y alla dimensione di Pnt
np = size(Pnt,1);
y = zeros(np,1);

% Ciclo su tutti i punti da valutare
for k=1:np
    % valutazoine di tutti i punti della rbf
    fval = zeros(length(acoeff),1);
    for i=1:length(acoeff)
        % valuto distanze rispetto al punto in considerazione
        r = norm(P(i,:)-Pnt(k,:));
        % valutazione della rbf
        rbf_val = feval(rbf_func,r,varargin{:});
        fval(i) = rbf_val;
    end

    % valutazione dell'interpolante nel punto
    y(k) = fval'*acoeff;
end
```

```
% aggiunta dell'offset
if dim==1
    % Problema monodimensionale
    offsetVal = offset(1) + offset(2)*Pnt;
end
if dim==2
    % Problema monodimensionale
    offsetVal = offset(1) + offset(2)*Pnt(:,1) + offset(3)*Pnt(:,2);
end

y = y + offsetVal;
```

Esercizio 3

Confrontare i codici `rbf_eval_nostab` e `rbf_eval_stab` nei seguenti casi:

- una funzione costante;
- una funzione a scelta dello studente (nell'esempio riportato si è scelta la funzione $\sin(x)$).

Per ognuna delle funzioni considerate si provi a variare la funzione di base scelta e i parametri (ϵ, σ) che definiscono tale funzione di base;

Osservare le proprietà (es. def. pos.) della matrice di interpolazione per $[\Phi]$ per le diverse scelte delle funzioni di base.

Risultati

Caso della funzione costante (multiquadratica inversa con $\epsilon = 10^{-2}$):

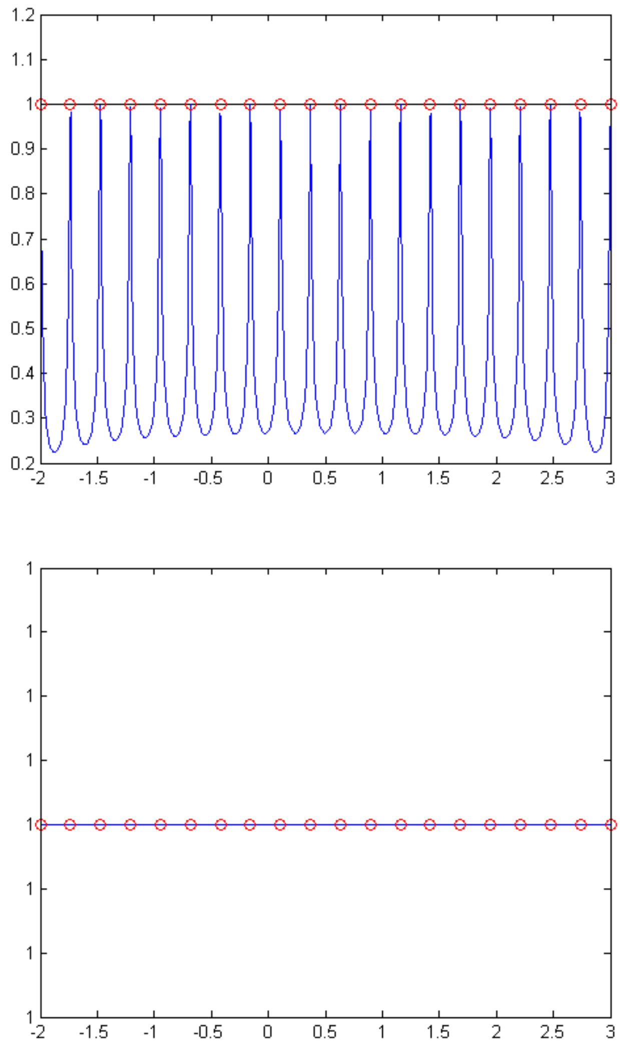
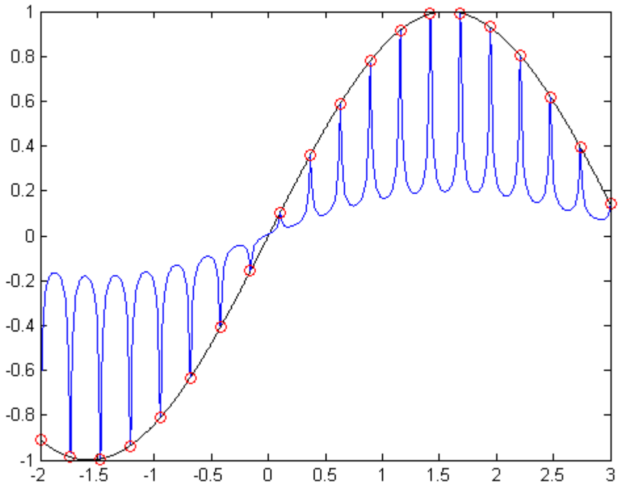


Figura 4: Funzione costante.

Caso della funzione $\sin(x)$ (multiquadratica inversa con $\epsilon = 10^{-2}$:



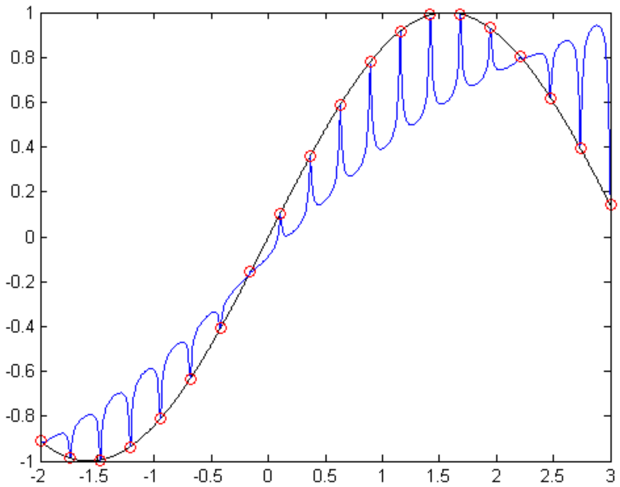


Figura 5: Funzione $\sin$.

Caso della funzione $\sin(x)$ (multiquadratica inversa con $\epsilon = 10^{-1}$):

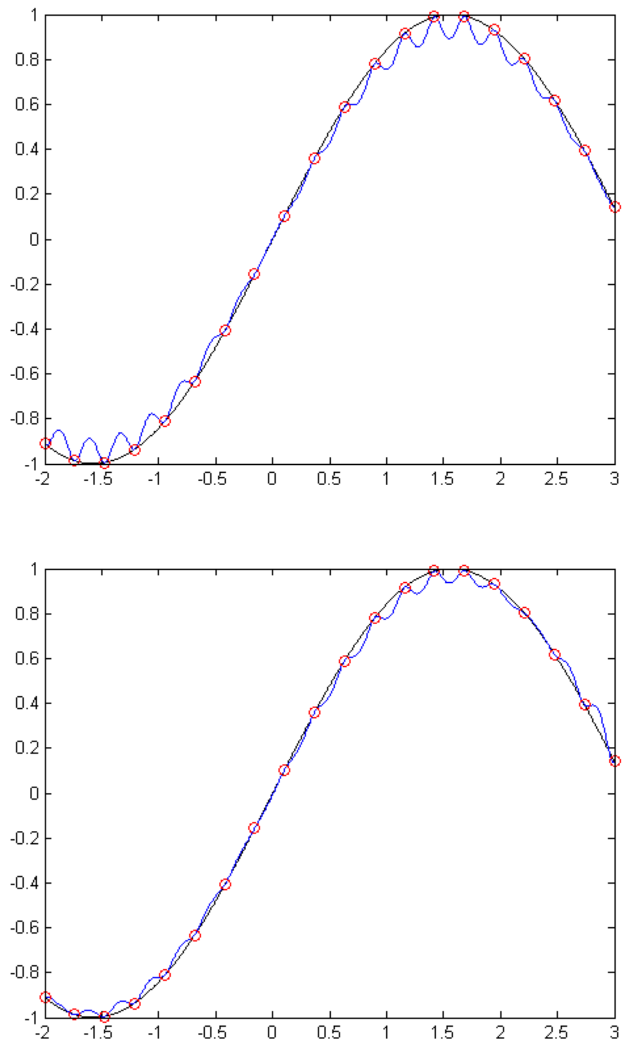
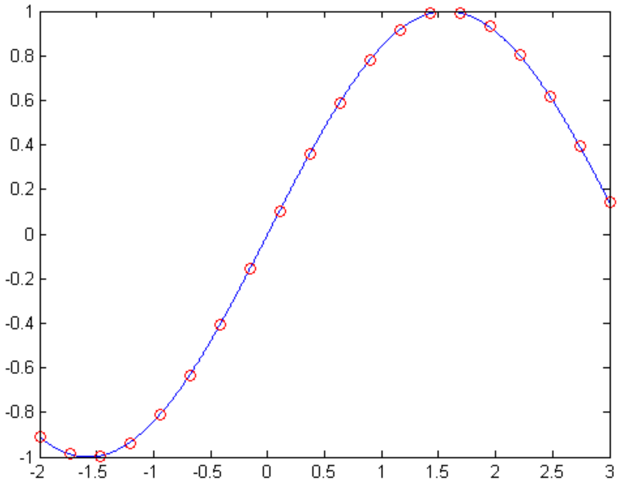


Figura 6: Funzione $\sin$.

Caso della funzione $\sin(x)$ (multiquadratica inversa con $\epsilon = 10^{+1}$):



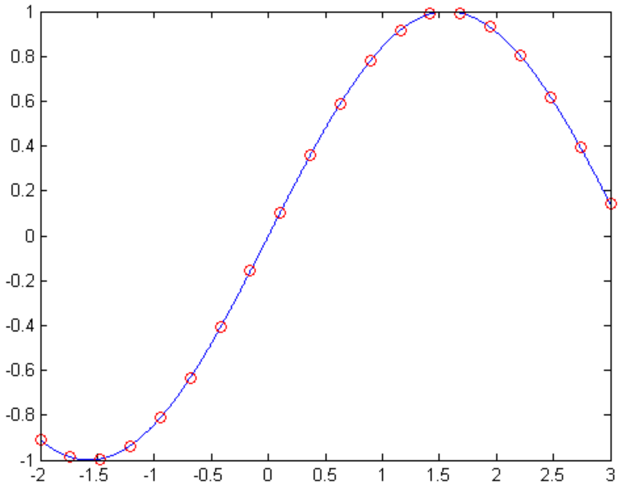


Figura 7: Funzione $\sin$.

Esercizio 5

Provare l'interpolazione RBF in un caso bidimensionale per diverse funzioni di base e parametri . L'esempio qui proposto è il caso dell'interpolazione della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ nel quadrato $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

Risultati

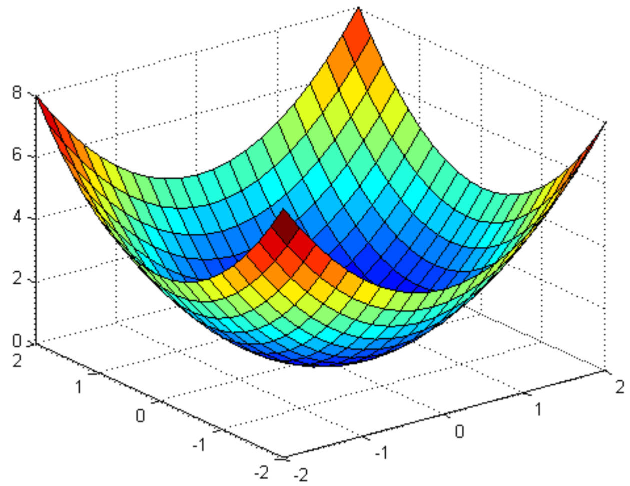


Figura 8: Funzione originaria

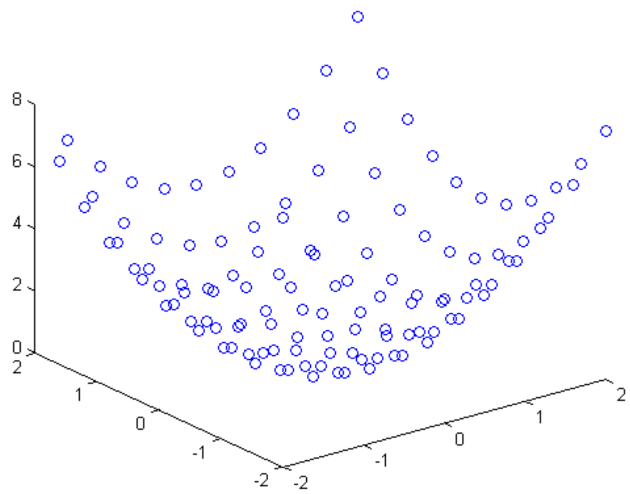


Figura 9: Punti di interpolazione

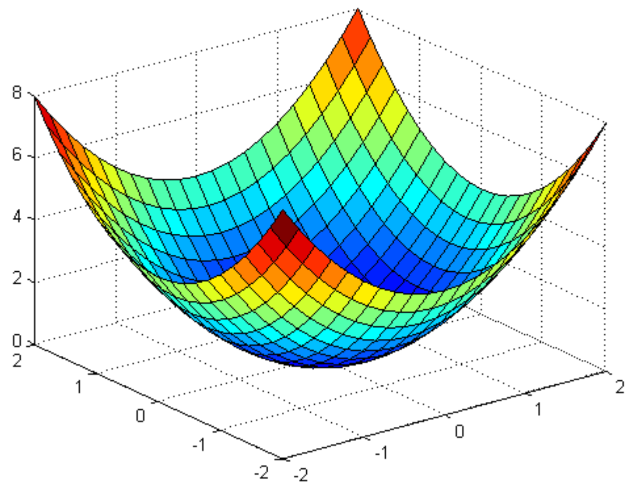


Figura 10: Interpolazione RBF con multiquadratica inversa e $\epsilon = 10^{+1}$.

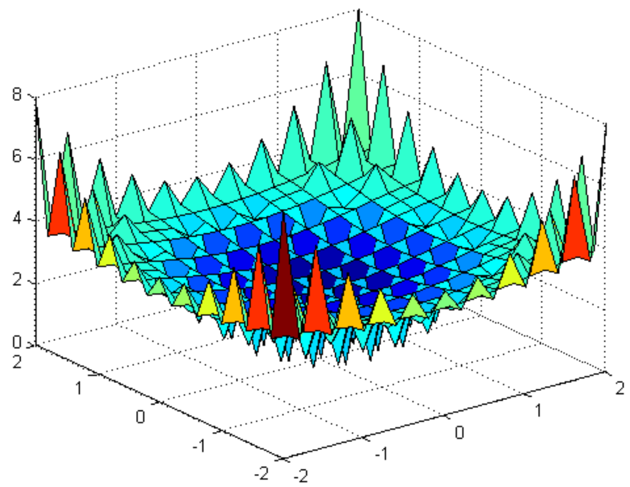


Figura 11: Interpolazione RBF con multiquadratica inversa e $\epsilon = 10^{-2}$.