Logaritmo

(e relative proprietà)

Ripasso di matematica

Manolo Venturin

~~~ 1 ~~~

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)
~~~

Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Ripasso sui logaritmi
- Il logaritmo viene introdotto come funzione inversa dell’esponenziale
- Equazioni e disequazioni con il logaritmo
- Esempi

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Il logaritmo

Il logaritmo è l'operazione inversa dell'esponenziale, i.e. si deve trovare quel valore di x tale che

$$a^x = b \iff x = \log_a b$$

e si legge "x è uguale al logaritmo di b (argomento) in base a"

L'equazione $a^x = b$ con $a > 0$ e $a \neq 1$ ha soluzione solo se $b > 0$ (condizione di esistenza del logaritmo)

Se $a = e \approx 2.71828\ldots$, dove e è numero di Nepero, si parla di logaritmo naturale e si indica con il simbolo abbreviamo $\log(\cdot)$ oppure $\ln(\cdot)$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Funzioni inverse

- Logaritmo dell'esponenziale

$$\log_a a^x = x$$

Dalla definizione di logaritmo, se $b = a^x$ allora

$$x = \log_a b \iff a^x = b (= a^x)$$

- Esponenziale del logaritmo

$$a^{\log_a x} = x$$

Dalla definizione di logaritmo, se $b = \log_a x$ allora

$$a^b = x \iff b = \log_a x (= b)$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Il logaritmo: grafici

> Se (x_0, y_0) è un punto della funzione esponenziale, allora (y_0, x_0) è un punto della funzione logaritmo.

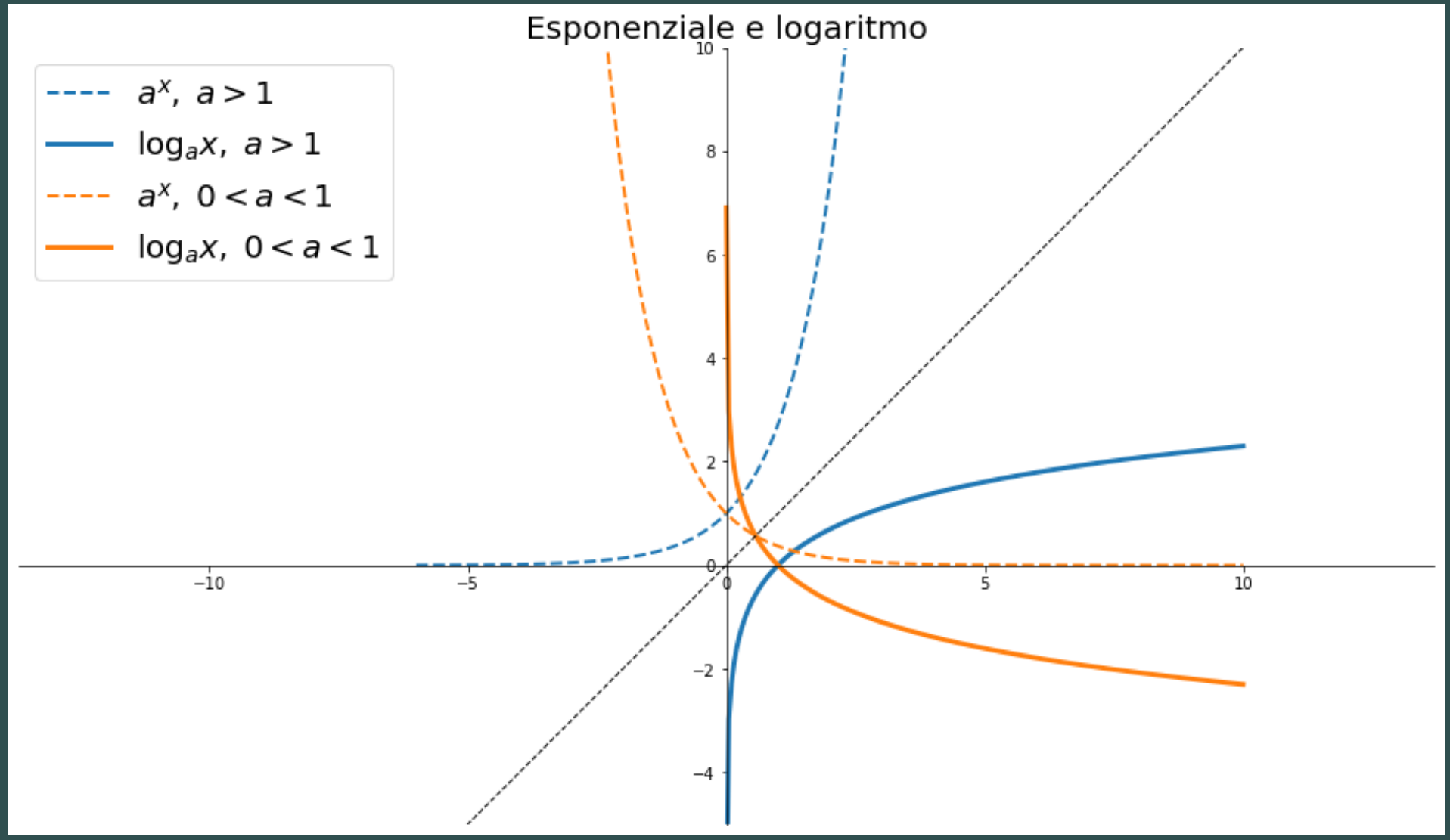
Il punto (x_0, y_0) appartiene alla funzione esponenziale se abbiamo $y_0 = a^{x_0}$

Ora passando all'inversa si ha $x_0 = \log_a y_0$ e quindi (y_0, x_0) è un punto della funzione logaritmo

Quindi i grafici delle funzioni logaritmiche si ottengono per simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante (proprietà delle funzioni inverse)

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Il logaritmo: grafici



Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Il logaritmo: proprietà

Le proprietà dei logaritmo (con $a > 0$ e $a \neq 1$) sono le seguenti:

- $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ dove è richiesto $x, y > 0$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ dove è richiesto $x, y > 0$
- $\log_a x^y = y \cdot \log_a x$ dove è richiesto $x > 0$
- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ (formula del cambio di base)

L'ultima formula nel caso di un cambiamento di base verso i logaritmi naturali diventa (usatissima)

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Il logaritmo: disequazioni

La funzione logaritmo è una funzione del tipo

$$y = \log_a x$$

che è valida (ha soluzione) solo se $x > 0$

Si ha

- per $a > 1$ la funzione è **crescente**, i.e. $x > y \implies \log_a x > \log_a y$
- per $0 < a < 1$ la funzione è **decrescente**, i.e. $x > y \implies \log_a x < \log_a y$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempi

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 1

> Semplificare
>
> $$x = \log_{\frac{1}{2}} 2^3$$

Soluzione

Usando le proprietà del logaritmo e osservando che

$$\log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = -1 \cdot \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right) = -1 \cdot 1 = -1$$

si ha

$$\log_{\frac{1}{2}} 2^3 = 3 \cdot \log_{\frac{1}{2}} 2 = 3 \cdot -1 = -3$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 2

> Risolvere l'equazione
>
> $$e^x + 3e^{-x} = 4$$

Soluzione

Ponendo $t = e^x$ l'equazione diventa

$$t + 3\frac{1}{t} = 4$$

Essendo $t \neq 0$ si ha

$$t^2 - 4t + 3 = 0 \implies t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \{3,\ 1\}$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 2

$$t = e^x \quad \text{e} \quad t_{1,2} = \{3,\ 1\}$$

Quindi

- per $t = 3$ si ha $3 = e^x \implies x = \ln 3$
- per $t = 1$ si ha $1 = e^x \implies x = \ln 1 = 0$

(Verifica)

- per $x = 0$ si ha $e^0 + 3e^0 = 4 \iff 4 = 4$
- per $t = \ln 3$ si ha $e^{\ln 3} + 3e^{-\ln 3} = 4 \iff 3 + 3 \cdot \frac{1}{3} = 4 \iff 4 = 4$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 3

> Risolvere la seguente disequazione
>
> $$\log_2 x \leqslant 0$$

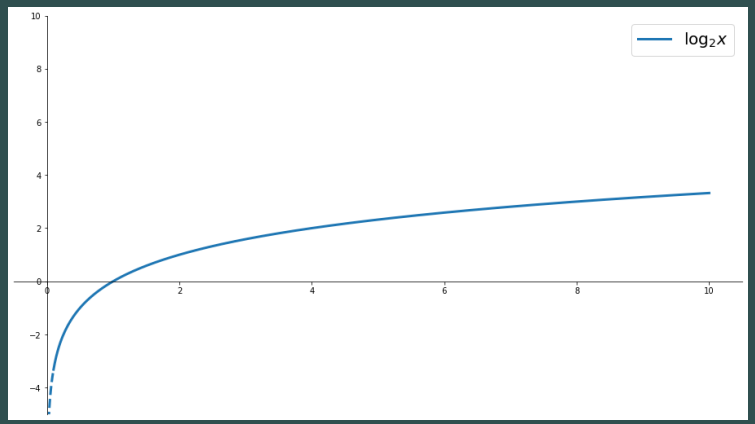
Soluzione

Possiamo scrivere

$$0 = \log_2 1$$

e quindi si ha (funz. crescente)

$$\log_2 x \leqslant \log_2 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 < x \leqslant 1$$



Nota: Ricordarsi sempre del dominio!

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 4

> Risolvere la seguente disequazione
>
> $$\log_{\frac{1}{2}} x \leqslant 1$$

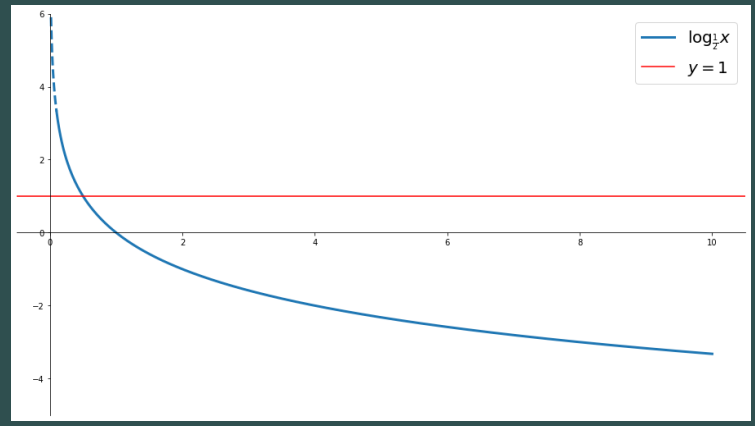
Soluzione

Possiamo scrivere

$$1 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$$

e quindi si ha (funz. decrescente)

$$\log_{\frac{1}{2}} x \leqslant \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \implies x \geqslant \frac{1}{2}$$



Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 5 (importantissimo)

> Risolvere la seguente disequazione dove $a > 0$
>
> $$e^x \leqslant a \quad , \quad e^x \geqslant a \quad , \quad \ln x \leqslant a \quad , \quad \ln x \geqslant a$$

Soluzione

La soluzione coinvolge le proprietà

$$\log_a a^x = x \quad \text{e} \quad a^{\log_a x} = x$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 5 (importantissimo)

> Risolvere la seguente disequazione dove $a > 0$
>
> $$e^x \leqslant a \quad , \quad e^x \geqslant a \quad , \quad \ln x \leqslant a \quad , \quad \ln x \geqslant a$$

Soluzione

Da

$$a = e^{\ln a}$$

si ha

$$e^x \leqslant e^{\ln a} \implies x \leqslant \ln a$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 5 (importantissimo)

> Risolvere la seguente disequazione dove $a > 0$
>
> $$e^x \leqslant a \quad , \quad e^x \geqslant a \quad , \quad \ln x \leqslant a \quad , \quad \ln x \geqslant a$$

Soluzione

Da

$$a = e^{\ln a}$$

si ha

$$e^x \geqslant e^{\ln a} \implies x \geqslant \ln a$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 5 (importantissimo)

> Risolvere la seguente disequazione dove $a > 0$
>
> $$e^x \leqslant a \quad , \quad e^x \geqslant a \quad , \quad \ln x \leqslant a \quad , \quad \ln x \geqslant a$$

Soluzione

Da

$$a = \ln e^a$$

si ha

$$\ln x \leqslant \ln e^a \implies 0 < x \leqslant e^a$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 5 (importantissimo)

> Risolvere la seguente disequazione dove $a > 0$
>
> $$e^x \leqslant a \quad , \quad e^x \geqslant a \quad , \quad \ln x \leqslant a \quad , \quad \ln x \geqslant a$$

Soluzione

Da

$$a = \ln e^a$$

si ha

$$\ln x \geqslant \ln e^a \quad \Longrightarrow \quad x \geqslant e^a$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 6

> Trovare il dominio (o condizioni di esistenza) di
>
> $$f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

Soluzione

Il dominio di $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ si ottiene imponendo l'argomento del logaritmo strettamente positivo, ovvero

$$\frac{x}{x+1} > 0$$

Essendo una disequazione fratta, studiamo il segno della frazione

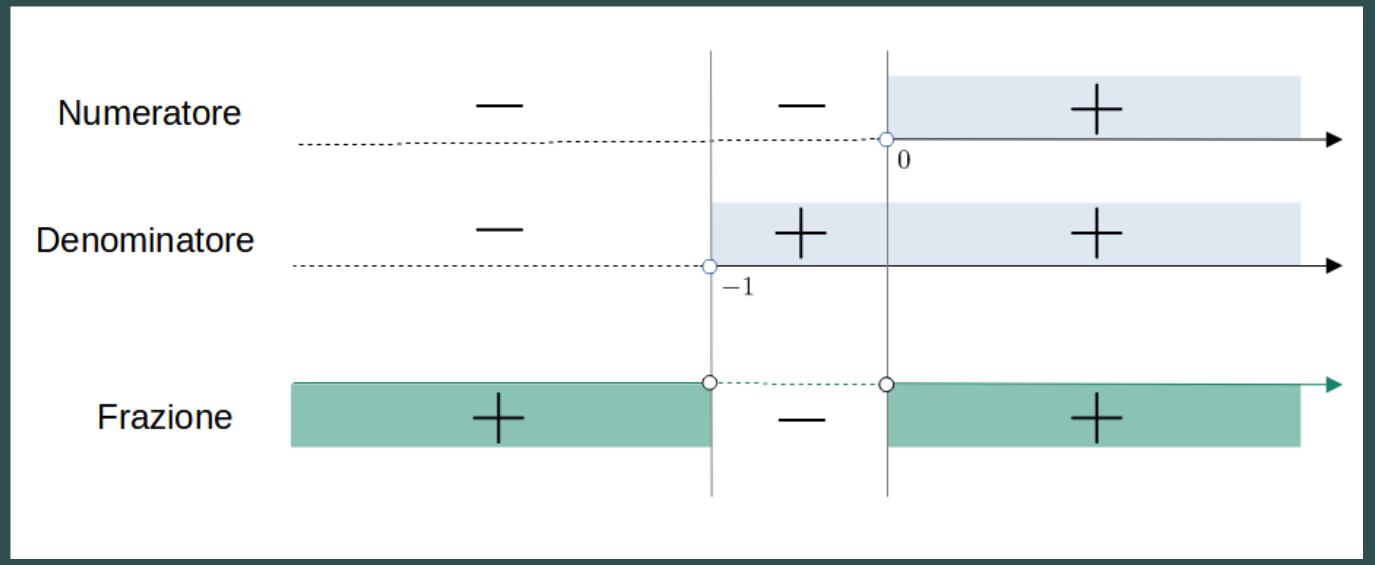
Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 6

$$\frac{x}{x+1} > 0$$

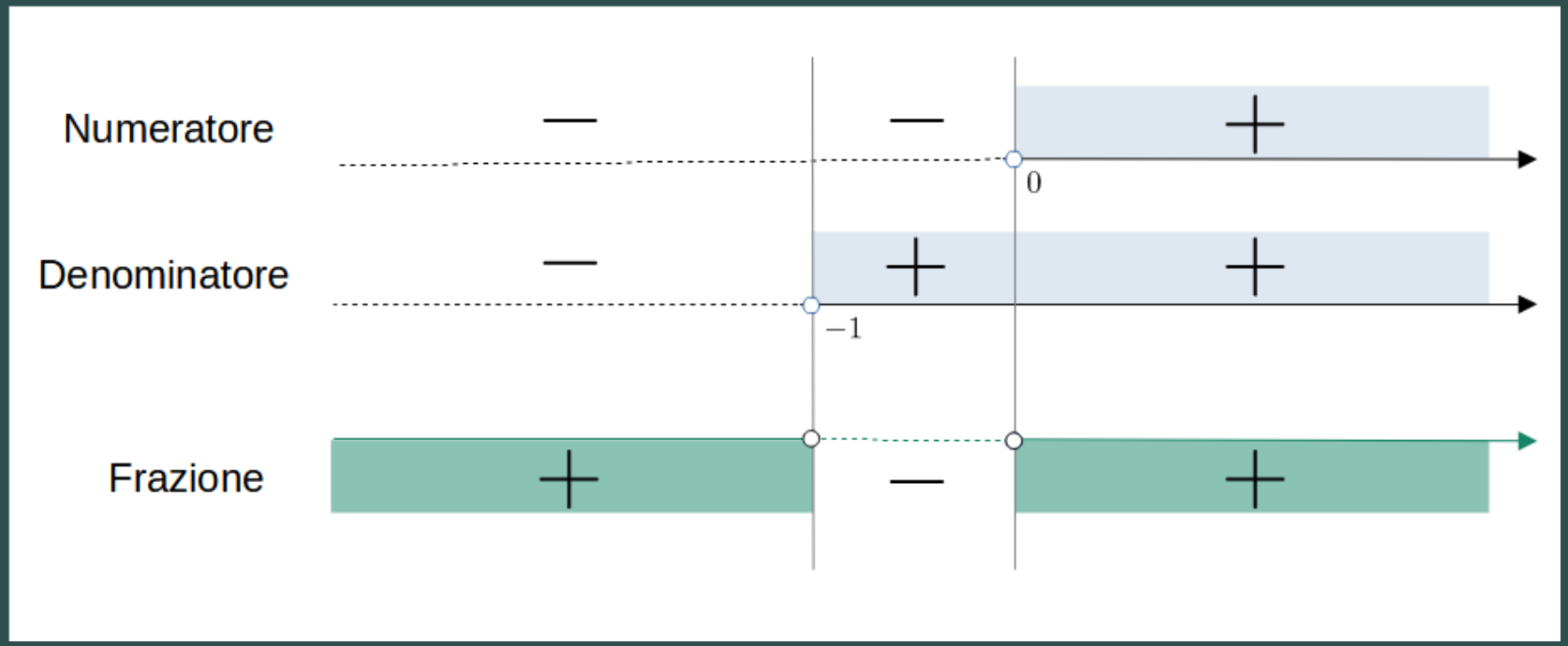
Il segno del numeratore e del denominatore sono:

- Numeratore: $x > 0 \implies \{x > 0\}$
- Denominatore: $x + 1 > 0 \implies \{x > -1\}$



Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 6



Quindi il rapporto tra numeratore e denominatore è positivo (rapporto tra due numeri positivi o negativi) per

$$\{x < -1\} \ \vee \ \{x > 0\}$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Storia

- Il logaritmo fu proposto nel 1614 da Nepero
- Furono utilizzati in astronomia attraverso delle tavole di calcolo (la prima ad opera di Henry Briggs nel 1617)
- Solo nel 1730 ad opera di Eulero si ha definizione di esponenziale e logaritmo dove presenta il legame del logaritmo tramite la funzione inversa dell'esponenziale (approccio odierno)
- Il logaritmo nasce prima dell'esponenziale!

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)