Esponenziale complesso

(Definizione / Proprietà / Seno e coseno)

Numeri complessi

Manolo Venturin

~~~ 10 ~~~
~~~

Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Esponenziale complesso e relative proprietà
- Definizione del seno e coseno

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Esponenziale complesso

Definizione

Partendo dalla formula di Eulero

$$e^{i\theta} \;=\; \cos\theta + i\sin\theta \;=\; \operatorname{cis}(\theta)$$

possiamo dare la definizione di **esponenziale complesso** come

$$e^{z} = e^{a+bi} \;=\; e^{a}\cdot e^{bi} \;=\; e^{a}\cdot\operatorname{cis}(b) \;=\; e^{a}\cdot(\cos b + i\sin b)$$

Se $b = 0$ si ha l'esponenziale reale e^{x}

Nota: In realtà si parte dal definire l'esponenziale complesso come serie (funzione analitica) e poi si sviluppa tutta la teoria

Proprietà

1. $e^0 = 1$
2. $e^z \neq 0$
3. $e^{z+w} = e^z e^w$
4. $(e^z)^n = e^{nz}, \; n \in \mathbb{Z}$
5. $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$
6. $e^{z+2\pi i} = e^z$ (periodicità)

Dimostrazione delle proprietà

Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento

Proprietà 1

> Dimostrare che $e^0 = 1$

Dimostrazione

$$e^0 = e^{0+0i} = e^0 \cdot \text{cis}(0) = e^0 \cdot (\cos 0 + i \sin 0) = 1 \cdot 1 = 1$$

Proprietà 2

> Dimostrare che $e^z \neq 0$

Dimostrazione

L'equazione

$$e^z = 0 \iff e^{a+bi} = 0 \iff \overbrace{\cancel{e^a}}^{\neq 0} \cdot \mathrm{cis}(b) = 0 \iff \cos b + i \sin b = 0$$

corrisponde a risolvere il sistema

$$\begin{cases} \cos b = 0 \\ \sin b = 0 \end{cases}$$

che non ha soluzione

Proprietà 3

> Dimostrare che $e^{z+w} = e^z e^w$

Dimostrazione

Sia $z = a + bi$ e $w = c + di$, allora

$$
\begin{aligned}
e^{z+w} &= e^{(a+c)+(b+d)i} \\
&= e^{a+c} \cdot \operatorname{cis}(b+d) \\
&= e^a \cdot e^c \cdot \left[\cos b \cos d - \sin b \sin d + i\left(\sin b \cos d + \cos b \sin d\right)\right] \\
&= e^a \cdot e^c \cdot \left[(\cos b + i \sin b)\cos d + i\left(\cos b + i \sin b\right)\sin d\right] \\
&= e^a \cdot e^c \cdot \left[(\cos b + i \sin b)\left(\cos d + i \sin d\right)\right] \\
&= e^a \cdot \operatorname{cis}(b) \cdot e^c \cdot \operatorname{cis}(d) \\
&= e^z \cdot e^w
\end{aligned}
$$

Proprietà 4

> Dimostrare che $(e^z)^n = e^{nz},\ n \in \mathbb{Z}$

Dimostrazione

Sia $z = a + bi$ allora

$$\begin{aligned}
(e^z)^n &= \left(e^{a+bi}\right)^n = [e^a \cdot \text{cis}(b)]^n \\
&= (e^a)^n \cdot (\text{cis}(b))^n \\
&\text{(dalla rappr. trigonometrica)} \\
&= e^{na} \cdot \text{cis}(nb) \\
&= e^{na} \cdot e^{inb} \\
&= e^{na+inb} \\
&= e^{n(a+bi)} = e^{nz}
\end{aligned}$$

Proprietà 5

> Dimostrare che $\overline{e^{z}} = e^{\overline{z}}$

Dimostrazione

Si ha

$$\begin{aligned}
\overline{e^{z}} &= \overline{e^{a+bi}} \\
&= \overline{e^{a}} \cdot \overline{e^{bi}} \\
&= e^{a} \cdot \left(\overline{\cos b + i \sin b}\right) \\
&= e^{a} \cdot (\cos b - i \sin b) \\
&= e^{a} \cdot (\cos(-b) + i \sin(-b)) \\
&= e^{a-bi} = e^{\overline{z}}
\end{aligned}$$

Proprietà 6

> Dimostrare che $e^{z+2\pi i} = e^z$, cioè la funzione è periodica di periodo $2\pi i$

Dimostrazione

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \cdot 1 = e^z$$

Definizione del seno e coseno

> Dimostrare che (connessione dell'esponenziale complesso con le funzioni trigonometriche)
>
> $$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

Dimostrazione

Da

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta - i\sin\theta \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned} &(\text{Sommando}) \quad e^{i\theta}+e^{-i\theta} = 2\cos\theta \implies \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ &(\text{Sottraendo}) \quad e^{i\theta}-e^{-i\theta} = 2i\sin\theta \implies \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \end{aligned}$$


FINE
Manolo Venturin