Integrazione per parti
Esercizi #3

(Integrazione per parti) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 20 ~~~
~~~

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Esercizi

Calcolare

1. $\int \sin^2 x\,dx \qquad = \left[\frac{1}{2}\left(-\sin x\cos x + x\right) + C\right]$
2. $\int \cos^2 x\,dx \qquad = \left[\frac{1}{2}\left(\sin x\cos x + x\right) + C\right]$
3. $\int \cos x \cdot \ln\left(\sin x\right) dx \qquad = \left[\sin x \cdot \left(\ln\left(\sin x\right) - 1\right) + C\right]$
4. $\int \sqrt{x}\ln x\,dx \qquad = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln|x| - \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}} + C\right]$
5. $\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx \qquad = \left[-x\cot x + \ln\sin x + C\right]$
6. $\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx \qquad = \left[x\tan x + \ln\cos x + C\right]$
7. $\int x\tan^2 x\,dx \qquad = \left[x\tan x + \ln\cos x - \frac{x^2}{2} + C\right]$
8. $\int x^n \ln x\,dx$ per $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 1$ $\qquad = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C\right]$

Se vi piace iscrivetevi al canale e mettete un mi piace

Soluzione

Esercizio 1

> Calcolare $\quad I = \int \sin^2 x \, dx$

Soluzione

$$
\begin{aligned}
I \;=\; & \int \sin^2 x \, dx = \int \sin x \sin x \, dx = \begin{pmatrix} u = \sin x, & u' = \cos x \\ v' = \sin x, & v = -\cos x \end{pmatrix} = \\
& -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx = \left(\sin^2 x + \cos^2 x = 1\right) = \\
& -\sin x \cos x + \int \left(1 - \sin^2 x\right) \, dx = -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x \, dx + C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\implies \quad 2 \int \sin^2 x \, dx \;&=\; -\sin x \cos x + x \\
\implies \quad \int \sin^2 x \, dx \;&=\; \tfrac{1}{2} \left(-\sin x \cos x + x\right) + C
\end{aligned}
$$

Esercizio 2

> Calcolare $I = \int \cos^2 x \, dx$

Soluzione

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \cos x \cos x \, dx = \begin{pmatrix} u = \cos x, & u' = -\sin x \\ v' = \cos x, & v = \sin x \end{pmatrix} =$$

$$\sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx = \left(\sin^2 x + \cos^2 x = 1\right) = \sin x \cos x + \int \left(1 - \cos^2 x\right) \, dx =$$

$$\sin x \cos x + x - \int \cos^2 x \, dx$$

$$\implies \quad 2 \int \cos^2 x \, dx \;=\; \sin x \cos x + x$$

$$\implies \quad \int \cos^2 x \, dx \;=\; \frac{1}{2} \left(\sin x \cos x + x\right) + C$$

Esercizio 3

> Calcolare $I = \int \cos x \cdot \ln \sin x \, dx$

Soluzione

Dall'esempio 3 della teoria si ha $\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1)$ e quindi

$$
\begin{aligned}
I &= \begin{pmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{pmatrix} = \int \ln t \, dt = t(\ln t - 1) \\
&= \sin x \cdot (\ln|\sin x| - 1) + C
\end{aligned}
$$

Esercizio 4

> Calcolare $I = \int \sqrt{x} \ln x \, dx$

Soluzione

$$
\begin{aligned}
I &= \begin{pmatrix} u = \ln x, & u' = \frac{1}{x} \\ v' = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, & v = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln|x| - \frac{2}{3} \int \frac{1}{x} \cdot x^{\frac{3}{2}} \, dx \\
&= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln|x| - \frac{2}{3} \int x^{\frac{1}{2}} \, dx \\
&= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln|x| - \frac{4}{9} x^{\frac{3}{2}} + C
\end{aligned}
$$

Esercizio 5

> Calcolare $I = \displaystyle\int \frac{x}{\sin^2 x}\, dx$

Premessa (già risolti)

- $\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\cot x$ (primitiva elementare)
- $\int \cot x\, dx = \ln|\sin x|$ (ex #2 degli esercizi sulle funz. trig. #3)

Soluzione

$$
\begin{aligned}
I &= \begin{pmatrix} u = x, & u' = 1 \\ v' = \dfrac{1}{\sin^2 x}, & v = -\cot x \end{pmatrix} = -x\cot x + \int \cot x\, dx \\
&= -x\cot x + \ln|\sin x| + C
\end{aligned}
$$

Esercizio 6

> Calcolare $I = \int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx$

Premessa (già risolti)

- $\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \tan x$ (primitiva elementare)
- $\int \tan x\, dx = -\ln \cos x$ (esempio #3 della teoria sulle funz. trig.)

Soluzione

$$
\begin{aligned}
I &= \begin{pmatrix} u = x, & u' = 1 \\ v' = \frac{1}{\cos^2 x}, & v = \tan x \end{pmatrix} = x \tan x - \int \tan x\, dx \\
&= x \tan x + \ln|\cos x| + C
\end{aligned}
$$

Esercizio 7

> Calcolare $\quad I = \int x \tan^2 x \, dx$

Soluzione

Sfrutto il risultato dell'esercizio precedente: $\int \frac{x}{\cos^2 x} \, dx = x \tan x + \ln|\cos x|$ e quindi

$$\begin{aligned} I &= \int x \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx \\ &= \int \frac{x}{\cos^2 x} \, dx - \int x \, dx \\ &= x \tan x + \ln|\cos x| - \frac{x^2}{2} + C \end{aligned}$$

Esercizio 8

> Calcolare $\quad I = \int x^n \ln x \, dx \quad$ per $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 1$

Soluzione

$$
\begin{aligned}
I &= \begin{pmatrix} u = \ln x, & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x^n, & v = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix} = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{1}{x} \, dx \\
&= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n \, dx \\
&= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C
\end{aligned}
$$


FINE