# Riconducibili a frazioni razionali

(Razionali) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 20 ~~~
~~~

# Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

# Indice degli esempi

Calcolare

1. $\int \frac{1}{\sin x}\, dx$
2. $\frac{1}{4} \int \frac{1}{x^{1/2} - x^{1/4}}\, dx$
3. $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} \cos x \, dx$
4. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\, dx$
5. $\int \frac{3}{x\sqrt{9+4x^2}}\, dx$
6. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\, dx$
7. $\int \frac{dx}{1-\sin(2x)}$ con verifica
8. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}\, dx$ con il cambio $x^2 + x + 1 = (x-u)^2$
9. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}\, dx$ con sost. trig.

**Nota:**

- La maggior parte degli esempi sono difficili!
- Gli esercizi 8 e 9 sono impossibili (qui per curiosità)!

# Riconducibili a funzioni razionali

Alcune sostituzioni, trasformano gli integrali di alcune **funzioni non razionali** (funzioni trigonometriche, esponenziali o logaritmiche) in integrali di **funzioni razionali** (facili da risolvere con i **fratti semplici** )

Vediamo i seguenti **casi principali** dove $R(\cdot)$ indica una **generica funzione razionale** dei suoi argomenti

Questo è l'ultimo argomento sulle varie tecniche di integrazione.

**Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento**

# Esempio 1 (da sostituzione)

> Calcolare $\quad I = \displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx$

**Soluzione**

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx = \begin{pmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x\,dx \end{pmatrix} = -\int \frac{1}{1-t^2}\,dt \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{2}{1-t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\int \frac{(1+t)+(1-t)}{(1+t)(1-t)}\,dt \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{1-t}\,dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\ln|1-t| - \frac{1}{2}\ln|1+t| = \frac{1}{2}\ln|1-\cos x| - \frac{1}{2}\ln|1+\cos x| \\
&= \ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} + C
\end{aligned}
$$

# Esempio 1 (da sostituzione)

$$I = \int \frac{1}{\sin x}\,dx = \ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} + C$$

Dalla uguaglianza

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \frac{\frac{1}{2}\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \tan^2\frac{x}{2}$$

possiamo riscrivere la soluzione come

$$I = \ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)$$

o

$$I = \ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = -\frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x} = -\operatorname{arctanh}\left(\cos x\right)$$

# Funzione razionale di $x$

Un integrale che contenga una funzione del tipo

$$R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{n_1/d_1}, \ \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{n_p/d_p}\right)$$

si razionalizza attraverso la sostituzione

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$$

con $n$ il minimo comune multiplo di $d_1, \ \ldots \ d_p$

# Esempio 2

> Calcolare $I = \frac{1}{4} \int \frac{1}{x^{1/2} - x^{1/4}} \, dx$

**Soluzione**

Se si pone $x = t^4$, con $t = \sqrt[4]{x}$, e $dx = 4t^3 \, dt$ si ha

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} \int \frac{4t^3}{t^2 - t} \, dt = \int \frac{t^2}{t-1} \, dt \\ &= \int \frac{(t-1)(t+1)+1}{t-1} \, dt = \int (t+1) \, dt + \int \frac{1}{t-1} \, dt \\ &= \frac{1}{2} t^2 + t + \ln |t-1| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + \ln |\sqrt[4]{x} - 1| + C \end{aligned}$$

# Sostituzioni trigonometriche

## Caso 1

Per una funzione razionale del tipo

$$R\left(\sin x\right)\cos x$$

si usa la sostituzione $t = \sin x$

## Caso 2

Per una funzione razionale del tipo

$$R\left(\cos x\right)\sin x$$

si usa la sostituzione $t = \cos x$

# Esempio 3

> Calcolare $I = \int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} \cos x \, dx$

**Soluzione**

Posto $t = \sin x$ con $dt = \cos x \, dx$ si ha

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} \cos x \, dx \\ &= \int \frac{t^2}{1+t^2} \, dt = \int \frac{(t^2+1)-1}{1+t^2} \, dt \\ &= \int 1 \, dt - \int \frac{1}{1+t^2} \, dt = t - \arctan t \\ &= \sin x - \arctan(\sin x) + C \end{aligned}$$

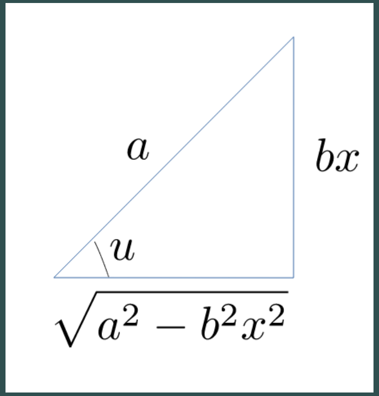
# Sostituzioni trigonometriche

## Caso 3

Per una funzione razionale del tipo

$$\sqrt{a^2 - b^2x^2}$$

si usa la sostituzione $x = \frac{a}{b}\sin u$ da cui




$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - b^2x^2} &= \sqrt{a^2 - \cancel{b^2}\frac{a^2}{\cancel{b^2}}\sin^2 u} \\ &= a\sqrt{1 - \sin^2 u} \\ &= a\cos u\end{aligned}$$

$$\sin u = \frac{bx}{a}$$
$$\cos u = \frac{\sqrt{a^2 - b^2x^2}}{a}$$
$$\tan u = \frac{bx}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}}$$

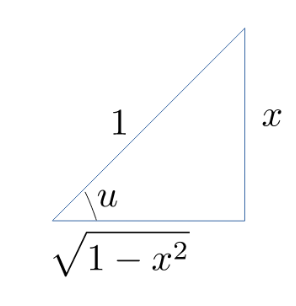
# Esempio 4

> Calcolare $I = \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx$

**Soluzione**

Applichiamo

- la sostituzione $x = \sin u$
- con $dx = \cos u\,du$
- $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 u} = \sqrt{\cos^2 u} = \cos u$




Quindi, si ha

$$I = \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx = \int \frac{\cos u}{\sin u}\,du = \int \frac{1-\sin^2 u}{\sin u}\,du = \int \frac{1}{\sin u}\,du - \int \sin u\,du$$

# Esempio 4

$$I = \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx = \int \frac{1}{\sin u}\,du - \int \sin u\,du \quad , \quad \sin u = x \quad , \quad \cos u = \sqrt{1-x^2}$$

Dall'esempio 1

$$\int \frac{1}{\sin u}\,dx = -\operatorname{arctanh}\left(\cos u\right)$$

e quindi

$$I \;=\; -\operatorname{arctanh}\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2} + C$$

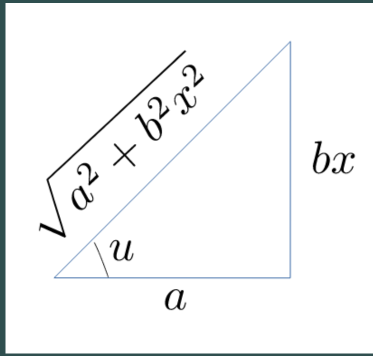
# Sostituzioni trigonometriche

## Caso 4

Per una funzione razionale del tipo

$$\sqrt{a^2 + b^2 x^2}$$

si usa la sostituzione $x = \frac{a}{b} \tan u$ da cui




$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + b^2 x^2} &= \sqrt{a^2 + \cancel{b^2} \frac{a^2}{\cancel{b^2}} \tan^2 u} \\ &= a\sqrt{1 + \tan^2 u} \\ &= \frac{a}{\cos u} \end{aligned}$$

$$\sin u = \frac{bx}{\sqrt{a^2 + b^2 x^2}}$$

$$\cos u = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 x^2}}$$

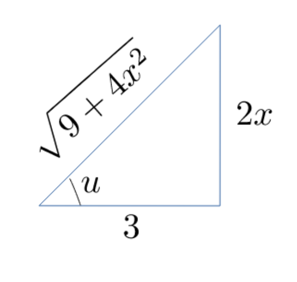
$$\tan u = \frac{bx}{a}$$

# Esempio 5

> Calcolare $I = \int \frac{3}{x\sqrt{9+4x^2}}\,dx$

**Soluzione**

Usando la sostituzione $x = \frac{3}{2}\tan u$ con
$dx = \frac{3}{2}\frac{1}{\cos^2 u}\,du$ e ricordando che
$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ si ha




$$I = 3\int \frac{\frac{3}{2}\frac{1}{\cos^2 u}}{\frac{3}{2}\tan u \cdot \frac{3}{\cos u}}\,du = \int \frac{1}{\cos u \tan u}\,du = \int \frac{1}{\sin u}\,du$$

# Esempio 5

$$I = \int \frac{1}{\sin u}\, du \quad , \quad \sin u = \frac{2x}{\sqrt{9+4x^2}} \quad , \quad \cos u = \frac{3}{\sqrt{9+4x^2}}$$

Dall'esempio 1

$$\int \frac{1}{\sin u}\, dx = -\operatorname{arctanh}\left(\cos u\right)$$

e quindi

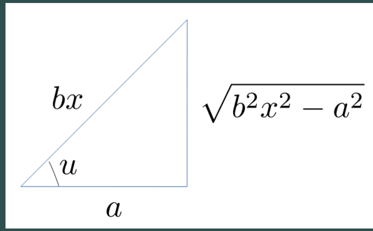
$$I = -\operatorname{arctanh}\left(\frac{3}{\sqrt{9+4x^2}}\right) + C$$

# Sostituzioni trigonometriche

## Caso 5

Per una funzione razionale del tipo

$$\sqrt{b^2x^2 - a^2}$$




si usa la sostituzione $x = \frac{a}{b}\frac{1}{\cos u}$ da cui

$$\begin{aligned}\sqrt{b^2x^2 - a^2} &= \sqrt{\cancel{b^2}\frac{a^2}{\cancel{b^2}}\frac{1}{\cos^2 u} - a^2} \\ &= a\sqrt{\tan^2 u} \\ &= a\tan u\end{aligned}$$

$$\sin u = \frac{\sqrt{b^2x^2 - a^2}}{bx}$$

$$\cos u = \frac{a}{bx}$$

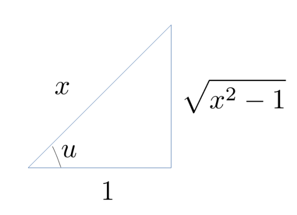
$$\tan u = \frac{\sqrt{b^2x^2 - a^2}}{a}$$

# Esempio 6

> Calcolare $I = \displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx$

**Soluzione**

Usando la sostituzione $x = \dfrac{1}{\cos u}$ con
$dx = \dfrac{1}{\cos^2 u}\sin u\,du$ si ha




$$I = \int \frac{\cancel{\cos^2 u}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 u}-1}}\frac{1}{\cancel{\cos^2 u}}\sin u\,du = \int \frac{\sin u}{\tan u}\,du = \int \cos u\,du = \sin u$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C$$

# Funzione razionale di seni e coseni

L'integrale di una funzione razionale in $\sin x$ e $\cos x$

$$R(\sin x, \cos x)$$

può essere ricondotto ad un'integrale di una funzione razionale attraverso la sostituzione

$$t = \tan\frac{x}{2} \quad , \quad x = 2\arctan t \quad , \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

con

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad , \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

**Nota:** Di solito questo metodo è molto laborioso ed è utilizzato quando non ci sono altre alternative più semplici

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \quad , \quad \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

# Esempio 7 (funz. razionale di seni e coseni)

> Calcolare $\quad I = \displaystyle\int \frac{dx}{1-\sin(2x)}$ e verificare il calcolo

**Soluzione**

Utilizzando la sostituzione $u = 2x$ con $du = 2\,dx$, si ha $\int \frac{dx}{1-\sin 2x} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{1-\sin u}$

Utilizzando la sostituzione $t = \tan\frac{u}{2}$, si ha

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{1-\sin u} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{2}{1-2t+t^2}\,dt$$

$$= \int \frac{1}{(1-t)^2}\,dt = -\int (1-t)^{-2}(-1)\,dt = \frac{1}{1-t}$$

# Esempio 7 (funz. razionale di seni e coseni)

Si ha

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{1-\sin 2x} \\
&= \frac{1}{1-t}\bigg|_{t=\tan\frac{u}{2}\ ,\ u=2x} \\
&= \frac{1}{1-\tan\frac{u}{2}} = \frac{1}{1-\tan x} \\
&= \frac{1}{1-\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\cos x}{\cos x - \sin x}
\end{aligned}$$

# Esempio 7 (funz. razionale di seni e coseni)

È interessante notare che

$$I = \int \frac{dx}{1 - \sin 2x} = \frac{\cos x}{\cos x - \sin x} = \frac{\sin x}{\cos x - \sin x}$$

infatti, le due espressioni

$$\frac{\cos x}{\cos x - \sin x} - 1 = \frac{\cos x}{\cos x - \sin x} - \frac{\cos x - \sin x}{\cos x - \sin x} = \frac{\sin x}{\cos x - \sin x}$$

differiscono di un termine costante

# Esempio 7 (funz. razionale di seni e coseni)

A riprova di ciò si possono calcolare le due derivate. Indicando con $c = \cos x$ e $s = \sin x$ si ha

- $D\left[\frac{c}{c-s}\right] = \frac{D[c]\cdot(c-s)-c\cdot D[c-s]}{(c-s)^2} = \frac{-s\cdot(c-s)-c\cdot(-s-c)}{(c-s)^2} = \frac{1}{(c-s)^2}$,
- $D\left[\frac{s}{c-s}\right] = \frac{D[s]\cdot(c-s)-s\cdot D[c-s]}{(c-s)^2} = \frac{c\cdot(c-s)-s\cdot(-s-c)}{(c-s)^2} = \frac{1}{(c-s)^2}$.

Inoltre, si ha $(\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2\cos x \sin x = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2x = 1 - \sin 2x$

# Altre sostituzioni notevoli

Esistono altre sostituzioni notevoli (raramente utilizzate nei compiti, mai capitato)

Ad esempio negli integrali che coinvolgono fattori quadratici del seguente tipo

$$\sqrt{x^2 + ax + b} = \sqrt{(x-\alpha)^2 \pm \beta^2}$$

posso utilizzare la sostituzione trigonometrica.

**Fatemi sapere se vi servono (o un maggiore approfondimento)!**

# Altre sostituzioni notevoli (sost. iperboliche)

Negli integrale del tipo

$$\sqrt{a^2 + b^2 x^2}$$

posso utilizzare la sostituzione $x = \frac{a}{b} \sinh u$ con $dx = \frac{a}{b} \cosh u \, du$ da cui

$$\sqrt{a^2 + b^2 x^2} \; = \; \sqrt{a^2 + \cancel{b^2} \frac{a^2}{\cancel{b^2}} \sinh^2 u} \; = \; a\sqrt{1 + \sinh^2 u} \; = \; a \cosh u$$

che a sua volta può essere ricondotto ad una funzione razionale con la sostituzione $z = e^u$

**Fatemi sapere se vi servono (o un maggiore approfondimento)!**

# Altre sostituzioni notevoli (sost. iperboliche)

Negli integrale del tipo

$$\sqrt{b^2x^2-a^2}$$

posso utilizzare la sostituzione $x=\frac{a}{b}\cosh u$ con $dx=\frac{a}{b}\sinh u\,du$ da cui

$$\sqrt{b^2x^2-a^2} \;=\; \sqrt{\cancel{b^2}\,\frac{a^2}{\cancel{b^2}}\cosh^2 u-a^2} \;=\; a\sinh u$$

che a sua volta può essere ricondotto ad una funzione razionale con la sostituzione $z=e^u$

**Fatemi sapere se vi servono (o un maggiore approfondimento)!**

# Esempio 8

> Calcolare
>
> $$I = \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$$
>
> usando la sostituzione $x^2+x+1=(x-u)^2$

**Soluzione**

Utilizzando la sostituzione $x^2+x+1=(x-u)^2$ si ha

$$x^2+x+1=(x-u)^2=x^2-2ux+u^2 \quad\Longrightarrow\quad x=\frac{u^2-1}{1+2u}$$

da cui, calcolando la derivata si ha

$$dx = 2\frac{u^2+u+1}{(1+2u)^2}$$

# Esempio 8

$$I=\int\frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}\,dx\quad,\quad x=\frac{u^2-1}{1+2u}\quad,\quad dx=2\frac{u^2+u+1}{(1+2u)^2}\,du$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+x+1}&=\sqrt{(x-u)^2}=(x-u)=\frac{u^2-1}{1+2u}-u\\&=-\frac{u^2+u+1}{1+2u}\end{aligned}$$

e quindi

$$I=\int\frac{2}{-\frac{u^2-1}{\cancel{1+2u}}\,\frac{\cancel{u^2+u+1}}{\cancel{1+2u}}}\,\frac{\cancel{u^2+u+1}}{\cancel{(1+2u)^2}}\,du=\int\frac{-2}{u^2-1}\,du$$

# Esempio 8

$$I = \int \frac{-2}{u^2 - 1}\, du$$

Intregrando attraverso la tecnica dei fratti semplici si ha

$$\int \frac{-2}{u^2-1}\, du = \int \frac{(u-1)-(u+1)}{(u-1)(u+1)}\, du \; = \; \int \frac{1}{u+1}\, du - \int \frac{1}{u-1}\, du = \ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right)$$

Ora dobbiamo esprimere la $u$ in funzione della $x$, si ha

$$u = x - (x-u) = x - \sqrt{x^2+x+1}$$

da cui

$$I = \ln\left(\frac{1+x-\sqrt{x^2+x+1}}{1-x+\sqrt{x^2+x+1}}\right) + C$$

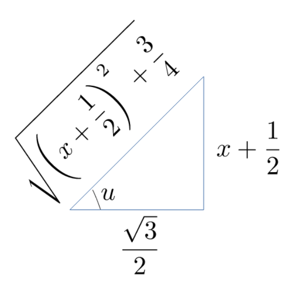
# Esempio 9

> Calcolare $I = \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}\, dx$ con la sostituzione trigonometrica

**Soluzione**

Scriviamo (completando il quadrato)

$$\sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$




e

$$x+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan u \quad , \quad dx = \frac{\sqrt{3}}{2\cos^2 u}\, du \quad , \quad \sqrt{x^2+x+1} = \frac{\sqrt{3}}{2\cos u}$$

# Esempio 9

$$x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan u \quad , \quad dx=\frac{\sqrt{3}}{2\cos^2 u}\,du \quad , \quad \sqrt{x^2+x+1}=\frac{\sqrt{3}}{2\cos u}$$

L'integrale diventa

$$I=\int\frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}\,dx=\int\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\tan u-1\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\cos u}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\cos^2 u}\,du=\int\frac{2}{\sqrt{3}\sin u-\cos u}\,du$$

Ora (sostituzione dell'angolo aggiunto) si ha

$$\frac{\sqrt{3}\sin u-\cos u}{2}=\sin\left(u-\frac{\pi}{6}\right)$$

da cui

$$I=\int\frac{2}{\sqrt{3}\sin u-\cos u}\,du=\int\frac{1}{\sin\left(u-\frac{\pi}{6}\right)}\,du=-\operatorname{arctanh}\left(\cos\left(u-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

# Esempio 9

$$I = -\operatorname{arctanh}\left(\cos\left(u - \frac{\pi}{6}\right)\right) \quad , \quad \cos u = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x^2+x+1}} \quad , \quad \sin u = \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

Ora

$$\cos\left(u - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}\cos u + \sin u}{2}$$

e

$$\frac{\sqrt{3}\cos u + \sin u}{2} = \frac{\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} + x + \frac{1}{2}}{2\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{x+2}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

quindi

$$I = -\operatorname{arctanh}\left(\frac{x+2}{2\sqrt{x^2+x+1}}\right) + C$$


FINE