Esercizi #3

(Integrale improprio) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 22 ~~~
~~~

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Indice degli esercizi

Studiare la convergenza dei seguenti integrali (su intervallo limitato)

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\,dx$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\,dx$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt[4]{1-\cos x}}\,dx$
4. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{1-e^{x^2}}\,dx$
5. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin\left(x-x^2\right)}{x\sin\sqrt{x}}\,dx$
6. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)dx$
7. $\displaystyle\int_0^{2} \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right)dx$
8. $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{x-1}}\,dx$

Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento

Soluzione

Esercizio 1

> Dire se è convergente il seguente integrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\, dx$

Soluzione

La funzione integranda $f(x)$ è continua in $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right]$

Quindi dobbiamo studiarne il comportamento per $x \to 0^+$

Si ha

$$x \to 0^+ \quad \Longrightarrow \quad \sin x \ \sim \ x + O(x^3) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \sim \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

La funzione integranda è infinita di ordine $\frac{1}{2}$ per $x \to 0^+$

Per il teorema del confronto $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ e quindi l'integrale converge

Esercizio 2

> Dire se è convergente il seguente integrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} \, dx$

Soluzione

La funzione integranda $f(x)$ è continua in $\left(0, \ \frac{\pi}{2}\right]$

Quindi dobbiamo studiarne il comportamento per $x \to 0^+$

Si ha

$$x \to 0^+ \quad \Longrightarrow \quad \sin x \ \sim \ x + O(x^3) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\sin x} \ \sim \ \frac{1}{x^1}$$

La funzione integranda è infinita di ordine 1 per $x \to 0^+$

Per il teorema del confronto $\alpha = 1 \geqslant 1$ e quindi l'integrale non converge

Esercizio 3

> Dire se è convergente il seguente integrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt[4]{1-\cos x}}\, dx$

Soluzione

La funzione integranda $f(x)$ è continua in $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right]$

Quindi dobbiamo studiarne il comportamento per $x \to 0^+$

Si ha

$$x \to 0^+ \quad \Longrightarrow \quad \cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt[4]{1-\cos x}} \sim \frac{1}{x^{\frac{2}{4}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

La funzione integranda è infinita di ordine $\frac{1}{2}$ per $x \to 0^+$

Per il teorema del confronto $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ e quindi l'integrale converge

Esercizio 4

> Dire se è convergente il seguente integrale $I = \int_0^1 \frac{1}{1 - e^{x^2}}\, dx$

Soluzione

La funzione integranda $f(x)$ è continua in $(0,\ 1]$

Quindi dobbiamo studiarne il comportamento per $x \to 0^+$

Si ha

$$x \to 0^+ \quad \Longrightarrow \quad e^{x^2} \sim 1 + x^2 + O(x^4) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{1 - e^{x^2}} \sim \frac{1}{x^2}$$

La funzione integranda è infinita di ordine 2 per $x \to 0^+$

Per il teorema del confronto $\alpha = 2 \geqslant 1$ e quindi l'integrale non converge

Esercizio 5

> Dire se è convergente il seguente integrale $I = \int_0^1 \frac{\sin(x - x^2)}{x \sin\sqrt{x}}\, dx$

Soluzione

La funzione integranda $f(x)$ è continua in $(0,\ 1]$

Quindi dobbiamo studiarne il comportamento per $x \to 0^+$

Per $x \to 0^+$ si ha

$$\sin x \ \sim\ x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$$

e quindi

$$\sin(x - x^2)\ \sim\ x - x^2 - \frac{1}{6}(x - x^2)^3 + O((x - x^2)^5)\ =\ x + O(x^2)$$

Esercizio 5

Quindi, per $x \to 0^+$ si ha

$$\frac{\sin\left(x - x^2\right)}{x \sin\sqrt{x}} \sim \frac{x}{x \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

Per il teorema del confronto $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ e quindi l'integrale converge

Esercizio 6

> Dire se è convergente il seguente integrale $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) dx$

Soluzione

La funzione integranda $f(x)$ è continua in $(0,\ 1]$

Quindi dobbiamo studiarne il comportamento per $x \to 0^+$

Per $x \to 0^+$ si ha

$$\sin x \ \sim\ x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$$

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x} \sim \frac{\frac{x^3}{6}}{x^2} = \frac{x}{6}$$

Esercizio 6

Si ha

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{x}{6} = \frac{\sqrt{x}}{6}$$

La funzione in 0 è prolungabile con continuità.

Quindi l'integrale è converge.

Esercizio 7

> Dire se è convergente il seguente integrale $I = \int_0^2 \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right) dx$

Soluzione

La funzione è continua in $[0,\ 1)\ \cup\ (1,\ 2]$

Quindi dobbiamo studiarne il comportamento per $x \to 1^{\pm}$

Per $x \to 1$ si ha

$$\frac{x}{x-1} \to \infty \quad \Longrightarrow \quad \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right) \to \pm\frac{\pi}{2}$$

Essendo limitata, l'integrale è convergente

Esercizio 8

> Dire se è convergente il seguente integrale $I = \int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{x-1}}\, dx$

Soluzione

La funzione è continua in $[0,\ 1)$

Quindi dobbiamo studiarne il comportamento per $x \to 1^-$

Per $x \to 1^-$ si ha

$$-\frac{1}{x-1} \to +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad e^{-\frac{1}{1-x}} \to +\infty$$

Osserviamo che $e^{-\frac{1}{1-x}} \to +\infty$ più rapidamente di qualuque potenza di $\frac{1}{(x-1)^\alpha}$ e quindi l'integrale non converge (basta un $\alpha \geqslant 1$)


FINE
Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)